Løsningsforslag til 2-timersprøven 7/12, E20, ver2

rev. 09.12.20

NB: Formålet med dette løsningsforslag er at vise hvordan opgaverne kan løses med brug af enkle Maple-kommandoer kendt fra MapleDemoer basic og enkle forklaringer. Af hensyn til læsbarheden er der nok skerevet lidt mere nogle steder, end man ville bruge tid på i en eksamenssituation, fx gentagelse af de stillede spørgsmål. Bemærk specielt at opgave 1 og 2 er *varianter* af de opgaver der stilles i Maple TA og at opgave 3 ikke her er besvaret i essaystil.

I ver2 af løsningsforslaget er varianten i Opgave 1 den samme som i pdf-udgaven af eksamenssættet.

Opgave 1, stilles og besvares i Maple TA

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
```

Lad a og b være reelle konstanter. Et inhomogent lineært ligningssystem har totalmatricen **T** givet ved

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & a-1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}.$$

1)

Bestem for a = -1 og b =0 en løsning til ligningssystemet.

```
> T:=<1,-3,5,5;0,-2,2,5;0,0,0,0;0,0,0,0>;
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(T)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsningsmængden:

```
> L:=<-5/2,-5/2,0>+t*<-2,1,1>;
```

$$L := \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} - 2t \\ -\frac{5}{2} + t \\ t \end{bmatrix}$$

Muligt svar fås for t = 0:

x0 = (-5/2,-5/2,0)

2)

Af løsningsmængden for det inhomogene system aflæses løsningsmængden for det tilsvarende homogene:

```
> Lhom:=t*<-2,1,1>;
```

$$Lhom := \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

Vektoren **w** = (-2,1,1) udspænder Lhom.

3)

Antag a = 1. For hvilken værdi af b har ligningssystemet løsninger?

Vi antager a = 1

```
> T:=<1,-3,5,5;0,0,2,5;0,0,2,b;0,0,0,0>;
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> RowOperation(T,[3,2],-1)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For a=1 indeholder systemet en inkonsistent ligning (jf. række 3) hvis ikke b = 5. Svar b = 5.

4)

Vi antager som i forrige spørgsmål a = 1 og b = 5, og skal finde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ således at $(\alpha, 0, \beta)$ og $(\gamma, 1, \delta)$ er løsninger .

```
> T:=<1,-3,5,5;0,0,2,5;0,0,2,5;0,0,0,0>;
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(T)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsningsmængden:

```
> L:=t-><-15/2,0,5/2>+t*<3,1,0>;
```

$$L := \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} + 3t \\ t \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

For $t = 0$ findes $\alpha = -\frac{15}{2}$ og $\beta = \frac{5}{2}$.

For $t = 1$ findes $\gamma = -\frac{9}{2}$ og $\delta = \frac{5}{2}$.

5)

Undersøg om der findes værdier af a og b for hvilket ligningssystemet har netop én løsning.

Hvis ikke a er enten -1 eller 1, indeholder ligningssystemet en inkonsistent ligning, jf. række 4 i **T**.

Hvis a = -1, skal b = 0, ellers indeholder ligningssystemet en inkonsistent ligning, jf række 3 i **T**.
Tilfældet b = 0 har vi behandlet i sp. 1, hvor der var en fri parameter.

Hvis a = 1, skal b = 5, ellers indeholder ligningssystemet en inkonsistent ligning, jf række 3 i **T**.
Tilfældet b = 5 har vi behandlet i sp. 3, hvor der var en fri parameter.

Der findes derfor ikke værdier af a og b for hvilke systemet har én løsning.

Opgave 2, stillet og besvares i Maple TA

En førsteordens inhomogen lineær differentialligning er givet ved

$$x'(t) + 3 \cdot x(t) = e^{3 \cdot t} \cdot \cos(t)$$

1)

Det oplyses at (*) har en partikulær løsning på formen

$$x_0(t) = a\, e^{3 \cdot t} \cos(t) + b\, e^{3 \cdot t} \sin(t) \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R}.$$

Bestem a og b.

```
> x0:=t->a*exp(3*t)*cos(t)+b*exp(3*t)*sin(t):
  x0(t)
```

$$a\, e^{3t} \cos(t) + b\, e^{3t} \sin(t)$$

```
> diff(x0(t),t)+3*x0(t)=e^(3*t)*cos(t)
```

$$6\, a\, e^{3t} \cos(t) - a\, e^{3t} \sin(t) + 6\, b\, e^{3t} \sin(t) + b\, e^{3t} \cos(t) = e^{3t} \cos(t)$$

$$(6\, a + b)\cos(t) + (6\, b - a)\sin(t) = \cos(t)$$

```
> lign1:=6*a+b=1;
```

$$lign1 := 6\,a + b = 1$$

```
> lign2:=6*b-a=0;
```

$$lign2 := 6\,b - a = 0$$

```
> solve({lign1,lign2},{a,b})
```

$$\left\{a = \frac{6}{37},\, b = \frac{1}{37}\right\}$$

2)

Bestem en løsning til den tilsvarende homogene differentialligning.

$x'(t) = -3 \cdot x(t)$. Lhom er givet ved $c \cdot e^{-3 \cdot t}$ hvor c er et reelt tal. Vi kan vælge:

$$x_h(t) = e^{-3 \cdot t}.$$

3-4)

Linhom er i følge struktursætningen og resultater i **1)** og **2)** givet ved

$$x(t) = \frac{6}{37}\, e^{3\,t} \cos(t) + \frac{1}{37}\, e^{3\,t} \sin(t) + c \cdot e^{-3 \cdot t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Kun den første af de foreslåede tre løsninger har den krævede form.

Om en andenordens lineær differentialligning oplyses at dens fuldstændige løsning er givet ved

$$x(t) = k_1\, e^{-5 \cdot t} \cos(3\,t) + k_2\, e^{-5 \cdot t} \sin(3\,t) \qquad (*)$$

5)

Bestem en af rødderne i karakterligningen.

Vi aflæser: $\alpha = -5$ og $\beta = 3$, dvs. $\lambda = -5 + 3\,i$.

6)

Bestem to tal k_1 og k_2 således at (*) er en løsning som opfylder at $x(0) = 1$ og $x'(0) = 1$.

```
> restart:
> x:=t->k1*exp(-5*t)*cos(3*t)+k2*exp(-5*t)*sin(3*t)
```

$$x := t \mapsto k1\, e^{-5\,t} \cos(3\,t) + k2\, e^{-5\,t} \sin(3\,t)$$

```
> x(0)=4
```

$$k1 = 4$$

```
> k1:=4;
```

$$k1 := 4$$

```
> D(x)(0)=5
```

$$-20 + 3\,k2 = 5$$

```
> k2:=solve(%,k2)
```

$$k2 := \frac{25}{3}$$

Opgave 3, essayopgave

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
  with(plots):
  prik:=(x,y)->VectorCalculus[DotProduct](x,y):
  kryds:=(x,y)->convert(VectorCalculus[CrossProduct](x,y),Vector)
  :
```

Givet vektorerne

```
> u1:=<1,0,1>:
  u2:=<1,1,1>:
```

1)

De to vektorer er ikke parallelle, dvs. de er dermed lineært uafhængige. De udgør derfor en basis for U som dermed har dim(U) = 2.

Med GramSchmidt algoritmen:

```
> v1:=u1/sqrt(prik(u1,u1))
```

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> w2:=u2-prik(u2,v1)*v1
```

$$w2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> v2:=w2/sqrt(prik(w2,w2))
```

$$v2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v1 og **v**2 har længden 1 og er ortogonale. (**v**1,**v**2) er dermed en ortonormal basis for U.

2)

Da U er kernen for f, gælder der for enhver vektor **u** i V at f(**u**)=0**u**. U er derfor identisk med egenrummet E[0].
Da **u**1+**u**2 og 2**v**1-**v2** ligger i kernen for f, gælder der f(**u**1+**u**2) = f(2**v**1-**v**2) = (0,0,0).

3)

Det ortogonale komplement er 1-dimensionalt og som basisvektor kan vælges

```
> v3:=kryds(v1,v2)
```

$$v3 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Sættet (**v**1,**v**2,**v**3) er dermed en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for f. Hvis vi sætter

```
> Q:=<v1|v2|v3>
```

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

er Q ortogonal.

Vi danner en diagonalmatrix af de egenværdier som svarer til (**v**1,**v**2,**v**3):

```
> Lambda:=DiagonalMatrix([0,0,4])
```

$$\Lambda := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Så vil der gælde $e\mathbf{F}e = \mathbf{Q}\cdot\Lambda\cdot\mathbf{Q}^T$.

4)

NB: Opgaven kan løses på flere måder og med flere mulige facit.

Her sætter vi

```
> u3:=<1,0,0>
```

$$u3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sættet (**v**1,**v**2,**u**3) er da lineært uafhængigt og udgør en ny basis for $\mathbb{R}^3$ med basisskiftematricen

```
> eMu:=<v1|v2|u3>
```

$$eMu := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En lineær afbildning er bestemt ved billedet af basisvektorerne. Vi kan da bestemme en mulig *g* ved *g*(**u**3)=(1,2,3). Så har vi

```
> eGu:=<0,0,1;0,0,2;0,0,3>
```

$$eGu := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> eGe:=eGu.eMu^(-1)
```

$$eGe := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$