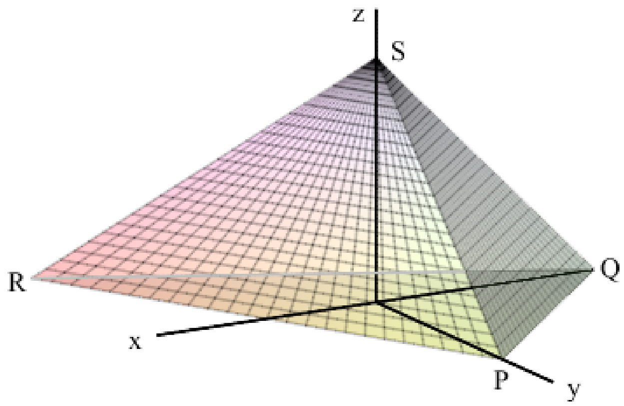
DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve i forårspensum den 17. maj 2021, kl. 11:00-12:30: Essayopgave-delen.
Kursus Navn: Matematik 1.
Kursus nr. 01005/01015/01016
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må benyttes. Om regler i øvrigt henvises til dokumentet PensumOgReglerF21 på kursets hjemmeside.

Essayopgave

I (x,y,z)-rummet er der givet vektorfelterne

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \left(z^2+2y,\, 3y-1,\, x^2+xz\right) \text{ og } \mathbf{U}(x,y,z) = \mathbf{rot}(\mathbf{V})(x,y,z)$$

og et massivt tetraeder T udspændt af punkterne $P=(0,1,0)$, $Q=(-1,0,0)$, $R=(1,-1,0)$ og $S=(0,0,1)$.



1. Find en parameterfremstilling for den rette linje fra P til R, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs linjestykket. Bestem også det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ fra P til R langs den brudte rette linje der går via Q. Er $\mathbf{V}$ et gradientvektorfelt?

Den udfyldte trekant F_1 mellem punkterne P, Q og S kan parametriseres ved

$$\mathbf{s}(u,v) = \left(-uv,\, v(1-u),\, 1-v\right),\ u \in [0,1]\ ,\ v \in [0,1]\ .$$

2. Udregn normalvektoren $\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{s}'_u(u,v) \times \mathbf{s}'_v(u,v)$ og bestem fluxen af $\mathbf{U}$ gennem F_1. Vælg en orientering af randen ∂F_1 som overholder højrekonventionen i forhold til $\mathbf{N}$, og bestem cirkulationen af $\mathbf{V}$ langs ∂F_1.

Lad F_2 betegne den udfyldte trekant mellem punkterne P, Q og R som tænkes orienteret med opadrettet enhedsnormalvektor.

3. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ gennem F_2.

4. Bestem en parameterfremstilling for det givne tetraeder T, og bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem tetraederets overflade ∂T.

5. Antag at T til tiden 0 begynder at flyde med $\mathbf{U}$ opfattet som hastighedsvektorfelt, vi følger specielt trekanten F_1. Bestem arealet af den flade som F_1 er blevet deformeret til, til tiden 1.

Opgaven er slut.