Matematik 1, 2-timersprøve E19 i essaystil ved Søren Ladegaard Kristensen

Opgave 1

Et homogent lineært ligningssystem er givet ved

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
2\,x_1 - x_2 + 8\,x_3 - 4\,x_4 &= 0 \\
x_1 - 2\,x_2 + 7\,x_3 + a \cdot x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

hvor $a \in \mathbb{R}$.

Opgave 1.1. Vi lader $a = 1$ og ønsker at opskrive den fuldstændige løsning på standardparameterform. Med denne a-værdi har ligningssystemet en koefficientmatrix som kaldes $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Koefficientmatricen reduceres til sin trappeform:

$$\operatorname{trap}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der er én søjle uden ledende 1-tal. Den ubekendte svarende til denne søjle kan således vælges som fri parameter ($x_3 = t$), og den fuldstændige løsning kan derved opskrives på standardparameterform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

Opgave 1.2. Det oplyses at for en bestemt a-værdi har koefficientmatricen rang 2, og for denne konkrete værdi skal der angives to lineært uafhængige løsninger til ligningssystemet. Koefficientmatricen er nu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 & a \end{bmatrix}$$

Hvis man (naivt) beder Maple om at reducere $\boldsymbol{A}$ til trappeform, får man samme svar som ovenfor uanset a-værdi:

$$\operatorname{trap}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her er rangen angiveligt 3, men dette kan altså ikke være korrekt for alle a-værdier. Derfor undersøger vi rækkeoperationerne nærmere. Det ses at vi med rækkeoperationerne

$$R_3 - R_1$$
$$R_2 - 2\,R_1$$
$$R_3 - R_2$$

når frem til følgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & a+5 \end{bmatrix}$$

hvoraf vi kan se, at hvis og kun hvis $a = -5$, er rangen 2. Med denne a-værdi kan vi nu bede Maple om at løse ligningssystemet, og vi får:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

hvor $s, t \in \mathbb{R}$. Vi opnår da to lineært uafhængige løsninger ved fx at sætte $(s, t) = (1, 0)$ og $(s, t) = (0, 1)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 2

Vi betragter et 2-dimensionalt vektorrum, V, med basis $v = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ og en lineær afbildning, $f: V \to \mathbb{R}^3$, som er givet ved afbildningsmatricen

$$_e\boldsymbol{F}_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

med hensyn til basis v i definitionsrummet, V, og standardbasis (e) i dispositionsrummet, $\mathbb{R}^3$.

Opgave 2.1. Vi skal angive koordinaterne for

$$\boldsymbol{v}_3 = 2\,\boldsymbol{v}_1 - 5\,\boldsymbol{v}_2$$

med hensyn til basen v. Men det ses umiddelbart at

$$_v\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Vi skal også bestemme billedvektoren, $f(\boldsymbol{v}_3)$. Men da $\boldsymbol{v}_3$ netop er udtrykt i v-koordinater, kan vi blot gange med ovennævnte afbildningsmatrix:

$$f(\boldsymbol{v}_3) = {}_e\boldsymbol{F}_{vv}\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Opgave 2.2. Vi skal nu løse ligningen $f(\boldsymbol{v}) = (1, 2, 10)$ hvor højresiden er at opfatte som en vektor i $\mathbb{R}^3$ givet i standardkoordinater. Dette svarer til at løse et lineært ligningssystem hvor højresiden er denne vektor, og koefficientmatricen er afbildningsmatricen givet ovenfor. Maple giver løsningen (i v-koordinater):

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Opgave 2.3. Vi skal bestemme dimensionen af henholdsvis billedrummet, $f(V)$, og $\ker(f)$. Det ses umiddelbart at de to søjlevektorer i afbildningsmatricen ikke er parallelle, dvs. de udgør en lineært uafhængig mængde. Idet billedrummet udspændes af søjlevektorerne i afbildningsmatricen, må dimensionen af billedrummet derfor være 2. Herefter følger det af dimensionssætningen at kernen har dimension

$$\dim(V) - \dim(f(V)) = 2 - 2 = 0$$

Kernen er altså triviel i den forstand at den kun består af nulvektoren i V.

Opgave 2.4. Vi skal angive en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke tilhører $f(V)$. Vi kan indledningsvis bemærke at dette skulle være muligt, da vi netop har set, at billedrummet har dimension 2 og dermed ikke udgør hele $\mathbb{R}^3$. Vi gætter på en tilfældig vektor, fx $(1, 2, 3)$. Vi vil nu undersøge om denne tilhører billedrummet. Hvis den gør, skal der være en løsning til det lineære ligningssystem der har følgende totalmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Denne totalmatrix fremkommer naturligvis ved at opfatte vores afbildningsmatrix som koefficientmatrix og vektoren $(1, 2, 3)$ som højreside. Ved reduktion får vi følgende trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hvor den nederste række svarer til en "inkonsistent ligning", dvs. $0 + 0 = 1$. Dermed er der ingen løsning til ligningen $f(\boldsymbol{v}) = (1, 2, 3)$. Dvs. vektoren $(1, 2, 3)$ tilhører ikke billedrummet.

Opgave 3

I $\mathbb{R}^3$ udstyret med det sædvanlige prikprodukt er givet tre vektorer:

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1)$$
$$\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -1)$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 0)$$

Om en matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ oplyses at den har egenrummene $E_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1\}$ og $E_{-3} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

Opgave 3.1. Vi betragter matricen $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$. Vi skal angive en diagonalmatrix, $\boldsymbol{\Lambda}$, som opfylder identiteten:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$$

Det er givet at $\boldsymbol{v}_1$ er egenvektor hørende til egenværdien $\lambda_1 = 6$, samt at $\boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_3$ er egenvektorer hørende til egenværdien $\lambda_2 = -3$. Således er $\boldsymbol{V}$ en basisskiftematrix der skifter fra egenbasen, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, til standardbasis i $\mathbb{R}^3$. Udtrykkes matricen $\boldsymbol{A}$ med hensyn til egenbasis, fås den ønskede diagonalmatrix, og indgangene langs diagonalen er egenværdierne. Derfor har vi:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Opgave 3.2. Vi skal gøre rede for at enhver vektor i E_6 er ortogonal på enhver vektor i E_{-3}. Det er nok at tjekke at basisvektorerne for de respektive egenrum er ortogonale. Mere præcist tjekker vi at

$$\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2 = 0$$
$$\boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_3 = 0$$

Beregningerne udføres i Maple, og det ses at disse to ligninger er opfyldt.

Opgave 3.3. Vi skal bestemme en positivt ortogonal matrix, $\boldsymbol{Q}$, som opfylder identiten:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T$$

Vi husker at for en ortogonal matrix gælder $\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$, og dermed beskriver den nævnte identitet et basisskifte fra en ortonormalbasis af egenvektorer til standardbasis. Kan vi finde en sådan ortonormalbasis af egenvektorer, kan disse anvendes som søjlevektorer i $\boldsymbol{Q}$. Jf. Opg. 3.2 kan vi nøjes med at ortogonalisere de to (basis)vektorer i E_{-3}. Derefter normaliseres alle tre egenvektorer, og dermed har vi søjlerne i matricen $\boldsymbol{Q}$. Beregningerne udføres i Maple, og vi får:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

I Maple tjekkes også at $\det(\boldsymbol{Q}) = +1$, hvilket betyder at $\boldsymbol{Q}$ er positivt ortogonal.

Opgave 4

Vi betragter et differentialligningssystem af første orden:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

hvor $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ og $t \in \mathbb{R}$. Det oplyses at den fuldstændige komplekse løsning er

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot e^{(2+6i)t} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{(2-6i)t} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære komplekse konstanter.

Opgave 4.1. Vi skal finde egenværdier og tilhørende egenrum for matricen $\boldsymbol{A}$. Af den fuldstændige komplekse løsnings form ses at der er to irreelle egenværdier (hinandens konjugerede da $\boldsymbol{A}$ har reelle indgange):

$$\lambda_1 = 2 + 6\,i$$
$$\lambda_2 = 2 - 6\,i$$

og der er to lineært uafhængige irreelle egenvektorer (ligeledes hinandens konjugerede):

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenrummene er da $E_{2+6i} = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1\}$ og $\text{E}_{2-6i} = \text{span}\{\boldsymbol{v}_2\}$.

Opgave 4.2. Vi skal vise at den partikulære løsning for hvilken det gælder, at $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, tilfredstiller begyndelsesbetingelsen

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette indses blot ved indsættelse. Beregningerne er udført i Maple, og det bekræftes at betingelsen er opfyldt.

Opgave 4.3. Vi skal finde de værdier af $t \in [0, 1]$ for hvilke banekurven som beskrevet i opgaven skærer henholdsvis Q og R. I punktet Q må gælde $x_2(t) = 0$, og i R må gælde $x_1(t) = 0$. Ved hjælp af Maple kan den partikulære løsning reduceres til

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} \sin(6t) \\ e^{2t} \cos(6t) \end{bmatrix}$$

hvoraf det for det første ses, at $x_2(t) = 0$, hvis og kun hvis $6t = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Således må den søgte t-værdi for punktet Q være den mindste ikke-negative løsning til denne ligning, og denne opnås for $n = 0$, dvs. banekurven skærer Q når $t = \frac{\pi}{12}$.

For det andet ses at $x_1(t) = 0$, hvis og kun hvis $6t = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Den søgte t-værdi må her være den næstmindste ikke-negative løsning til denne ligning (den mindste svarer til punktet P), og den opnås ved $m = 1$, dvs. banekurven skærer R når $t = \frac{\pi}{6}$.

Bilag

Maple-kode, Opgave 1.

```
> restart
> with(LinearAlgebra):
> A:=a-> <1,1,1,1;2,-1,8,-4;1,-2,7,a>:
> ReducedRowEchelonForm(A(1))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A(a))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

```
> A1:=RowOperation(A(a),[3,1],-1):
  A2:=RowOperation(A1,[2,1],-2):
  A3:=RowOperation(A2,[3,2],-1)
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & a+5 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> LinearSolve(A(-5),<0,0,0>,free=t)
```

$$\begin{bmatrix} -3\,t_3 + t_4 \\ 2\,t_3 - 2\,t_4 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Maple-kode, Opgave 2.

```
> restart
> with(LinearAlgebra):
> eFv:=<1,0,2|2,-1,0>:
> eFv.<2,-5>
```

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

```
> LinearSolve(eFv,<1,2,10>)
```

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

```
> ReducedRowEchelonForm(<eFv|1,2,3>)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Maple-kode, Opgave 3.

```
> restart
> with(LinearAlgebra):
> v1:=<1,-1,1>:
  v2:=<1,0,-1>:
  v3:=<1,1,0>:
> v1.v2;
  v1.v3
```

$$0$$
$$0 \qquad (8)$$

```
> GramSchmidt([v2,v3],normalized):
  Q:=<1/sqrt(v1.v1)*v1|Matrix(%)>
```

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

```
> simplify(Determinant(Q))
```

$$1 \qquad (10)$$

Maple-kode, Opgave 4.

```
> restart
> x1:=t->1/2*exp((2+6*I)*t)*I+1/2*exp((2-6*I)*t)*(-I):
  x2:=t->1/2*exp((2+6*I)*t)+1/2*exp((2-6*I)*t):
> <x1(0),x2(0)>
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

```
> evalc(x1(t));
  evalc(x2(t))
```

$$-e^{2t}\sin(6t)$$
$$e^{2t}\cos(6t) \qquad (12)$$