# Hjemmeopgavesæt 7

Med facit indskrevet i tekstbokse nedenfor.

# Vektoranalyse

*Deadline er 9/5, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Maple TA. hvor de kan være tvistede i forhold til her. Maple TA er åben på din klasses Inside konto fra torsdag 6/5, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til Opgaver på din klasses Inside konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.*

*I opgaverne der besvares i Maple TA er det vigtigt du kan*
- *designe passende parameterfremstillinger*
- *bestemme tangentielle kurveintegraler*
- *udnytte stamfunktionssætningen*
- *bestemme flux gennem åbne flader*
- *benytte Gauss' sætning*
- *benytte Stokes' sætning*
- *forstår betydning af orientering af kurver og flader*

*I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du kan*
- *bestemme flow-kurver for et vektorfelt*
- *kan forklare sammenhænge ml. divergens og flux*
- *modellere Maple-eksperimenter til eksemplificering af teori*
- *kan skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer*

## Opgave 1 Tangentielle kurveintegraler i gradientfelt. Besvares i Maple TA

I $(x, y, z)$-rummet er der givet vektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z)) = (\sin(y) + yz,\ x\cos(y) + xz + \cos(z),\ xy - y\sin(z)) .$$

a) I planen $y = \pi$ i $(x, y, z)$-rummet betragtes parabelstykket $\mathcal{K}$ givet ved ligningen $z = x^2$, $x = \in [-1, 1]$ . Angiv en parameterfremstilling for $\mathcal{K}$, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}$ med den ved parameterfremstillingen fastlagte orientering af $\mathcal{K}$.

a) En mulig parameterfremstilling: r(u)= (u,Pi,u^2), u in [-1,1].
Det tangentielle kurveintegral: 2Pi

b) Trappemetoden giver: f(x,y,z)= x*sin(y) + x*y*z + y*cos(z).
Tager vi gradienten af f får vi V. V er dermed et grad-velt.

b) Givet et vilkårligt punkt $P = (x, y, z)$. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs trappelinjen fra Origo til $P$. Brug dette til at afgøre om $\mathbf{V}$ er et gradientvektorfelt.

c) f(1,Pi,1) - f(-1,Pi,1) = 2Pi

c) Besvar igen spørgsmål a), hvor du nu benytter dit resultat i foregående spørgsmål.

d) En *Eight Curve* E er givet ved parameterfremstillingen:

$$\mathbf{r}(u) = \left(\cos(u)\,,\,0\,,\,\sin(u)\cos(u)\right),\; u \in [0, 2\pi]\,.$$

d) Cirkulationen er 0
da V er et gradfelt og
E er en lukket kurve

Plot E, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs E.

## |||| Opgave 2 Flux, Gauss og Stokes. Besvares i Maple TA

Et massivt omdrejningslegeme $\Omega$ i $(x, y, z)$-rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \left(vu\cos(w)\,,\,vu\sin(w)\,,\,v(1-u^3)\right),\; 0 \leq u \leq 1\,,\, 0 \leq v \leq 1\,,\, 0 \leq w \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Vi betragter vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (2x - 2y,\, y^2,\, z + x)$.

a) Lad $\mathcal{F}$ betegne profilområdet i $(x, z)$-planen for $\Omega$. Bestem fluxen $\int_{\mathcal{F}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, d\mu$

a) En p-fremstilling med ønsket orientering: (uv, 0, u(1-v^3)), u og v in [0,1]. Flux = 0

b) Bestem fluxen $\int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, d\mu$ hvor $\mathbf{n}$ er et udadrettet enhedsnormalvektorfelt på overfladen $\partial\Omega$ af $\Omega$.

b) Bruger Gauss. Div = 3+2y. Flux = 1/3 + (9*Pi)/20

c) Lad $\mathcal{K}$ betegne randkurven for den krumme del af $\partial\Omega$. Vælg den orientering af $\mathcal{K}$ der ved et gennemløb med udgangspunktet $(1, 0, 0)$ rammer $(0, 1, 0)$ før $(0, 0, 1)$, og bestem cirkulationen $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}\, d\mu$.

c) Bruger Stokes. Rot = (0,-1,2). Cirkulation = -3/4 + Pi/2

## |||| Opgave 3 Divergens. Essay-opgave

Intro: For at erkende den fulde dybde i Gauss' divergenssætning må man indse at divergensen angiver den lokale volumenvækst pr. volumenenhed. Det generelle bevis må nok betegnes som krævende (se eNoten, sætning 28.13). Vi skal her modellere et `Maple`-eksperiment der eksemplificerer bevisets idé og teknik i to konkrete scenarier.

I $(x, y, z)$-rummet er der givet vektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z)\right) = \left(4x^2 - 4xy\,,\, 2y^2 + 4x + 2\,,\, -z^2 + 1\right).$$

Vi betragter punkterne $P = (1, 1, 1)$ og $Q = (-3, -2, -1)$.

a) div i P = 6. div i Q = -22

a) Bestem divergensen af $\mathbf{V}$ i $P$ og $Q$ direkte ud fra definition 26.18 i eNoten.

b) Vi bestemmer en linearisering af $\mathbf{V}$ ud fra $P$ således: Find for $i = 1 \ldots 3$ det approksimerende førstegradspolynomium $U_i(x,y,z)$ for $V_i(x,y,z)$ med udviklingspunktet $P$. Vektorfeltet

$$\mathbf{U}(x,y,z) = \big(\, U_1(x,y,z), U_2(x,y,z), U_3(x,y,z) \,\big)$$

er da den ønskede linearisering af $\mathbf{V}$.

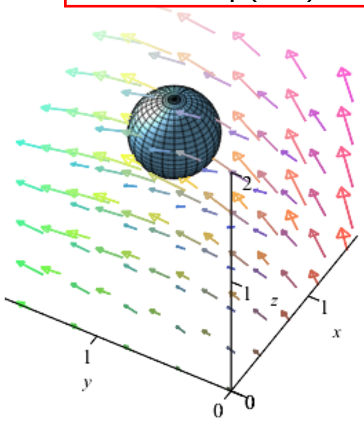
b) U(x,y,z) =(4x-4y, 4x+4y, 2-2z)

c) Bestem flowkurven $\mathbf{r}(t)$ for $\mathbf{U}$ med en vilkårlig begyndelsesbetingelse $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

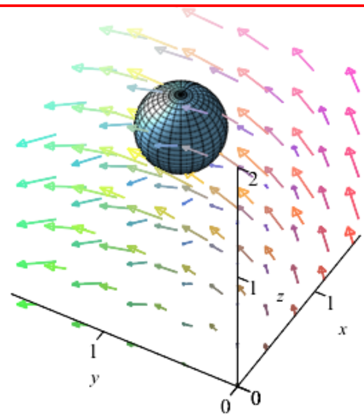
c) <exp(4*t)*(-sin(4*t)*y0+cos(4*t)*x0), exp(4*t)*(sin(4*t)*x0+cos(4*t)*y0), exp(-2*t)*(-1 + z0>

d) Vi indsætter en massiv kugle $K$ med centrum i $P$. Radius $\delta$ i $K$ tænkes valgt så lille at $K$ ligger inden for et område hvori $\mathbf{U}$ er en tilstrækkelig fin approksimation til $\mathbf{V}$.

d) <exp(4*t)*(-sin(4*t)*(1 + w*sin(u)*sin(v)) + cos(4*t)*(1 + w*sin(u)*cos(v))),
exp(4*t)*(sin(4*t)*(1 + w*sin(u)*cos(v)) + cos(4*t)*(1 + w*sin(u)*sin(v))),
1 + exp(-2*t)*w*cos(u)>



*K* set i vektorfelt **V**



*K* set i vektorfelt **U**

Bestem en parameterfremstilling for $K$.

e) Vi forestiller os nu at $K$ flyder med $\mathbf{U}$ opfattet som hastighedsvektorfelt. Lad $K_t$ betegne det massive område som $K$ er blevet deformeret til i løbet af tiden $t$. Vi har da $K = K_0$. Idet $\mathrm{Vol}(t)$ betegner rumfanget af $K_t$, skal det eftervises at

$$\frac{\mathrm{Vol}'(0)}{\mathrm{Vol}(0)} = \mathrm{Div}(\mathbf{V}(P)).$$

e) Div(V(P)) = 6

f) Beskriv kort hvad der sker hvis vi i spørgsmål b) til e) erstatter $P$ med $Q$.

f) Div(V(Q)) = -22