Hjemmeopgavesæt 6

Parametriseringer og Integration

Deadline er 20/3, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Möbius. hvor de kan være tvistede i forhold til her. Möbius er åben fra torsdag 17/3, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I opgaverne til besvarelse i Möbius er det vigtigt du kan
- *designe passende parameterfremstillinger for geometriske objekter i planen og rummet*
- *finde og benytte Jacobi-funktioner svarende til givne parameterfremstillinger*
- *udregne plan-, flade- og rumintegraler*
- *benytte Maple til avancerede udregninger*

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du kan
- *modellering af givne rumlige objekter vha. parameterfremstillinger*
- *finde og benytte Jacobi-funktioner svarende til givne parameterfremstillinger*
- *anvende såvel elementær som Maple teknik til integration*
- *kan bestemme kurvelængder, arealer og masse af rumligt område*
- *kan lave passende illustrationer i Maple*
- *kan skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 Plan-, flade- og rumintegraler. Besvares i Möbius

Et område $\mathcal{A}$ i (x, y)-planen er givet ved

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0 \text{ og } 0 \leq y \leq 4 - x^2 \right\} .$$

En flade $\mathcal{F}$ opstår ved at $\mathcal{A}$ løftes (lodret) op på grafen for funktionen

$$h(x, y) = 4 - x^2 - y \,, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

a) Bestem en parameterfremstilling for $\mathcal{A}$ og angiv den tilhørende Jacobi-funktion. Find massemidtpunktet for $\mathcal{A}$ idet massetætheden overalt er 1.

b) Bestem en parameterfremstilling for $\mathcal{F}$ og angiv den tilhørende Jacobi-funktion. Bestem fladeintegralet af $f(x,y,z) = y\sqrt{1+2x^2}$ over $\mathcal{F}$.

Lad Ω betegne det afsluttede rumlige område der ligger (lodret) mellem $\mathcal{A}$ og $\mathcal{F}$.

c) Bestem en parameterfremstilling for Ω og angiv den tilhørende Jacobi-funktion. Bestem rumfanget af Ω.

|||| Opgave 2 Flade- og rumintegraler. Besvares i Möbius

En profilkurve K i (x,z)-planen er givet ved punktmængden

$$K = \{\,(x,z)\,|\,x = \ln(z)\,,\,z \in [\,1\,,\,2\,]\}\;.$$

Profilkurven drejes omkring z-aksen fra argumentet -1 i (x,y)-planen til argumentet 1 i (x,y)-planen. Herved fremkommer der en omdrejningsflade $\mathcal{F}$.

a) Bestem en parameterfremstilling for både K og $\mathcal{F}$. Bestem den til $\mathcal{F}$ hørende Jacobi-funktion.

b) Bestem fladeintegralet $\displaystyle\int_{\mathcal{F}} \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\mu$, ved hjælp af stamfunktioner.

Et profilområde er givet ved punktmængden

$$\left\{(x,z)\ \mid\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\,\pi}{4}\ \text{ og }\ \cos(x) \le z \le \sin(x)\right\}\,.$$

Ved drejning af profilområdet omkring z-aksen fra argumentet $\frac{\pi}{2}$ i (x,y)-planen til argumentet π i (x,y)-planen fremkommer et omdrejningslegeme Ω.

c) Bestem en parameterfremstilling dels for profilområdet og dels for Ω. Bestem den til Ω hørende Jacobifunktion.

d) Bestem rumintegralet $\displaystyle\int_{\Omega} (x^2+y^2)\,d\mu$.

|||| Opgave 3 Modellering af kendt bygning. Essay-opgave

Du kender hunden der havde øjne så store som Rundetårn. Ret imponerende eftersom højden på tårnet (ifølge Wikipedia) er 41.5 meter. I denne opgave modelleres og undersøges Rundetårn vha. parametriseringer og integralregning.

Betegnelser på Rundetårns bygningsdele, diverse mål-data og anden info findes her. Ikke alle relevante mål-data er angivet, i så fald skønner man selv ud fra sammenhængen.

a) Start med at lave et plot af Rundetårns ydre fremtoning (idet der ses bort fra vinduer, døre, udsmykninger og den tilbyggede Trinitatis kirke på bagsiden af tårnet). Du skal bruge parametriseringer af to omdrejningscylindre (hovedtårnet og observatoriets underdel), en cirkelskive (platformen) og en halvkugle (kuplen på observatoriet).

Rundetårn er kendt for sin særegne hovedtrafikåre, der kaldes Sneglegangen. På figuren ses Peter den Store på vej ned ad Sneglegangen efter sin berømte tur til hest i 1716.

b) Først betragtes Sneglegangen som en regulær flade der opfylder at snitkurverne mellem fladen og en vilkårlig halvplan som udgår fra tårnets omdrejningsakse, er vandrette linjestykker. Bestem en parameterfremstilling for fladen og bestem dens areal.

c) Antag at Peter den Store red på midten af Sneglegangen. Hvor lang var turen ned? Kontrollér oplysningerne om den gennesnitlige stigning yderst og inderst.

d) Antag at Sneglegangens lodrette tykkelse aftager proportionalt med afstanden fra grundniveau, således at den nederst er 0.5 meter og øverst 0.4 meter. Giv en parameterfremstilling af Sneglegangen opfattet som massivt rumligt område. Hvor stor en del udgør Sneglegangens samlede masse af hele massen af Rundetårn (brug den i linket oplyste massefylde for brændt ler og sten)?