Hjemmeopgavesæt 6

Parametriseringer og Integration

Deadline er 21/3, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Maple TA. hvor de kan være tvistede i forhold til her. Maple TA er åben på din klasses Inside konto fra torsdag 18/3, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til Opgaver på din klasses Inside konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I opgaverne til besvares i Maple TA er det vigtigt du kan
- *designe passende parameterfremstillinger for geometriske objekter i planen og rummet*
- *finde og benytte Jacobi-funktioner svarende til givne parameterfremstillinger*
- *anvende elementære teknikker til integration i flere variable*
- *finde størrelser som fx rumfang og masse ved integralregning*
- *benytte Maple til avancerede udregninger*

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *kan håndtere passende omskrivninger af hyperbolske funktioner og deres omvendte*
- *anvende såvel elementær som Maple teknik til integration*
- *kan bestemme kurvelængder og fladeintegraler*
- *kan håndtere og illustrere elementære datasæt i Maple*
- *kan skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer*

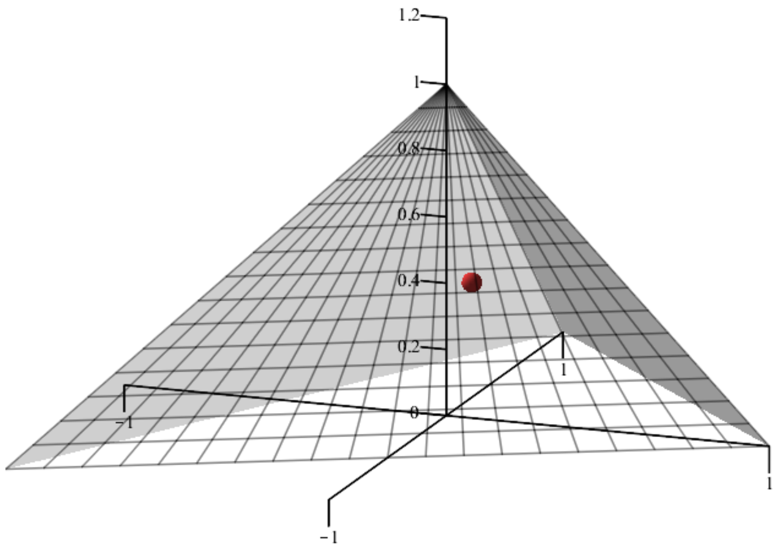
Opgave 1 Tetraeder med massemidtpunkt. Besvares I Maple TA

I (x, y, z)-rummet betragtes de fire punkter $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (-1, -1, 0)$, og $P = (0, 0, 1)$.

a) Giv en parameterfremstilling af linjestykket fra A til B.

b) Giv en parameterfremstilling af trekanten med hjørnerne A, B og C.

c) Giv en parameterfremstilling af tetraederet T udspændt af A, B, C og P.



d) En massetæthedsfunktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er givet ved forskriften

$$f(x, y, z) = (x + 1) \cdot z\,.$$

Bestem T's masse og massemidtpunkt.

|||| Opgave 2 Grafflade og omdrejningslegeme. Besvares i Maple TA

Vi betragter i (x, y)-planen en afsluttet og begrænset punktmængde B givet ved

$$B = \{(x, y) \mid x \in [0, \pi],\, y \in [-x,\, 2\sin(x) - x]\}\ .$$

Endvidere betragtes funktionen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften

$$h(x, y) = x + y\,.$$

a) Find en parameterfremstillingen for graffladen

$$\mathcal{F} = \{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in B\}\ .$$

b) Bestem fladeintegralet $\displaystyle\int_{\mathcal{F}} x \cdot z \, \mathrm{d}\mu\,.$

I (x, z)-planen i (x, y, z)-rummet betragtes nu profilområdet

$$A = \{(x, y, z) \mid x \in [0, \pi],\, y = 0,\, z \in [-x,\, 2\sin(x) - x]\}\ .$$

c) Hvor mange grader skal A drejes omkring z-aksen for at den af A gennemfejede punktmængde opnår rumfanget 4? Illustrér.

Opgave 3 Integralregning på areafunktioner. Essay-opgave

En kurve $K_{\mathbf{r}}$ i (x, y)-planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{arcosh}(t), \sqrt{2} \cdot \operatorname{arsinh}(t) \right) , \; t \in [1, 10] \, .$$

Vi fortolker $K_{\mathbf{r}}$ som et punkt P's bevægelse med t som tidsparameter.

a) Lav et plot af $K_{\mathbf{r}}$ sammen med de 10 punkter der angiver P's position ved $t = 1, t = 2, \ldots, t = 10$. Vink: Maple-kommandoerne `seq` og `pointplot`.

b) Find med Maple en stamfunktion til den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobi-funktion. Gør rede for at funktionen $f(u) = \operatorname{arcosh}(u^2)$, $u > 1$ måler længden af den del af $K_{\mathbf{r}}$ som P har bevæget sig i tiden fra $t = 1$ til $t = u$.

c) Gør rede for at funktionen $g(v) = \sqrt{\cosh(v)}$, $v > 0$ angiver det tidspunkt hvor P har gennemløbet kurvelængden v.

d) Lav et plot af $K_{\mathbf{r}}$ sammen med 10 positioner af P som deler $K_{\mathbf{r}}$ i 9 lige lange stykker.

For et tal $a \in \,]1, 5[$ betragtes i (x, z)-planen i rummet profilkurven $K_{\mathbf{s}}$ med parameterfremstillingen

$$\mathbf{s}(u) = \left(u, 0, \operatorname{arcosh}(u) \right) , \; u \in [a, 5] \, .$$

En funktion f er givet ved

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z \cdot (x^2 + y^2)} \, .$$

e) Bestem en parameterfremstilling for den omdrejningsflade der fremkommer når $K_{\mathbf{s}}$ drejes en omgang om z-aksen, og bestem for $a = 2$ fladeintegralet $\int_{K_{\mathbf{s}}} f \, d\mu$ som decimaltal med 3 decimaler.

f) Gør rede for at fladeintegralet omtalt i forrige spørgsmål ikke er defineret for $a = 1$. Undersøg fladeintegralet når a går imod 1.

Vink: Areafunktioner arcosh og arsinh skrives i Maple som arcusfunktioner, dvs. arccosh og arcsinh (selv om de ikke har med buelængder at gøre...).