Hjemmeopgavesæt 5

Differentiable funktioner af to variable

Deadline er 27/2, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Möbius. hvor de kan være tvistede i forhold til her. Mobius er åben fra torsdag 25/2, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til Opgaver på din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I opgaverne til besvarelse i Möbius er det vigtigt at du
- *kan beskrive definitionsmængder*
- *kan finde globale ekstrema på begrænsede, afsluttede mængder*
- *kan give geometrisk fortolkning af andengradsligninger i x og y*
- *kan håndtere retningsafledede*
- *kan benytte Hessematricen ved ekstremumsundersøgelser*

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *kan håndtere sammensatte funktioner*
- *kan opstille og benytte parametriserede kurver i planen og rummet ved lokale undersøgelser*
- *kan operere eksperimentelt når standardmetoder viser sig at svigte*
- *kan bruge Maple-plots ved undersøgelser og formidling*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 En funktion af to variable. Besvares i Möbius

I (x, y)-planen er der givet en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved forskriften

$$f(x,y) = 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 15y - 250\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Der betragtes endvidere en ret linje L med ligningen

$$y = \frac{1}{3}x\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Find skæringspunkterne mellem L og nul-niveaukurven K_0 for f. Lav en figur der illustrerer at L sammen med K_0 afgrænser en afsluttet og begrænset mængde som vi kalder M. Bestem det globale minimum og det globale maksimum af f på M og angiv de punkter hvori de antages.

b) K_0 er en parabel, bestem dens toppunkt og symmetriakse.

|||| Opgave 2 Ekstremumsundersøgelser. Besvares i Möbius

En funktion af to variable er givet ved forskriften

$$f(x,y) = 5y + 3\ln(x) - xy - y^2\,.$$

a) Bestem definitionsmængden $Dm(f)$ for f.

b) Givet punktet $P = (1,3)$. Bestem gradienten af f i P. Findes der retninger fra P i hvilken den retningsafledede af f i P antager værdien 1?

c) Bestem samtlige stationære punkter for f, og undersøg om f har lokalt ekstremum i dem. Angiv i givet fald arten af det lokale ekstremum. Begrund at f hverken har globalt min eller globalt maksimum på $Dm(f)$.

d) Vi betragter den afsluttede trekant T som har hjørnerne $(1,0)$, $(4,0)$ og $(1,3)$. Bestem det globale minimum og det globale maksimum af restriktionen af f til T, og angiv de punkter hvori de antages.

|||| Opgave 3 Lokale undersøgelser af funktion af to variable. Essay

I denne opgave undersøges funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{5}{4}x^2y - \frac{1}{4}x^4 - y^2 + 1\,.$$

Vi starter med at betragte en kurve K givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{r}(u) = \left(u, \frac{1}{2}u^2\right),\; u \in \mathbb{R}\,.$$

a) Lad h betegne den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$, $u \in \mathbb{R}$. Lav et Mapleplot hvor du har brugt h til at løfte K op på grafen for f. Bestem de værdier af u for hvilke $h(u) = 1$ og $h'(u) = 0$, og angiv de intervaller for u i hvilke $h'(u)$ er negativ, henholdvis positiv.

Vi betragter i det følgende punkterne $A = (0,-1)$ og $B = (0,0)$.

b) Bestem Hessematricen for f i A, og bestem arten af det approksimerende andengradspolynomium P_2 for f med udviklingspunktet A. Illustrér. Bestem den største fejl man begår, hvis man benytter P_2 i stedet for f på det afsluttede kvadrat der er afgrænset af linjerne $x = -1/10$, $x = 1/10$, $y = -11/10$ og $y = -9/10$.

c) Gør rede for at B er et stationært punkt for f hvor man ikke umiddelbart kan bruge Hessemetoden til at afgøre om B er sted for et lokalt ekstremum.

d) Vis at restriktionen af f til alle rette linjer gennem B har lokalt maksimum i B. Kan vi på den baggrund slutte at f har lokalt maksimum i B? HAR f lokalt maksimum i B?