Hjemmeopgavesæt 5

Differentiable funktioner af to variable

Deadline er 28/2, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Maple T.A. hvor de kan være tvistede i forhold til her. Maple TA er åben på din klasses Inside konto fra torsdag 25/2, 12:00. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til Opgaver på din klasses Inside konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I opgaverne til besvares i Maple TA er det vigtigt du

- *kan håndtere parametriserede kurver i planen og rummet*
- *behersker sammensatte funktioner og deres differentialkvotienter*
- *kan bestemme tangentvektorer*
- *kan beskrive definitionsmængder*
- *kan give geometrisk fortolkning af andengradsligninger i x og y*
- *kan benytte Hessematricen ved ekstremumundersøgelser*
- *kan finde globale ekstrema på begrænsede, afsluttede mængder*
- *kan finde approksimerende polynomier og deres grafer*

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du

- *kan finde retningsafledede*
- *kan opstille og benytte parametriserede kurver ved lokale undersøgelser*
- *kan håndtere sammensatte funktioner*
- *kan operere eksperimentelt når standardmetoder svigter*
- *kan bruge Maple-plots ved undersøgelser og formidling*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 En funktion af to variable. Besvares i Maple TA

Der er givet en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved forskriften

$$f(x,y) = x \cdot y - x - 2y + 1$$

og en kurve K_1 i (x,y)-planen med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = \left(u, (u-2)^2\right), \; u \in \mathbb{R}.$$

a) Vi betragter den sammensatte funktion

$$h(u) = f\big(\mathbf{r}(u)\big)\,.$$

Bestem det punkt $P = \mathbf{r}(u_0)$ i (x, y)-planen, for hvilket $h'(u_0) = -1$.

b) Lad K_2 være den kurve i (x, y, z)-rummet som fremkommer når K_1 løftes (lodret) op på grafen for f. Bestem en paramterfremstilling for K_2, og bestem den hertil hørende tangentvektor i det punkt $Q \in K_2$ som ligger lodret over P omtalt i forrige sprøgsmål.

c) Beskriv 0-niveaukurven for f.

d) Beskriv definitionsmængden for funktionen $g(x, y) = \sqrt{f(x, y)}$.

|||| Opgave 2 Ekstremumsundersøgelser. Besvares i Maple TA

En funktion af to variable er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x \cdot (x-2) \cdot y \cdot (1-y)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

a) Udregn de partielt afledede af første orden for f, og opskriv gradienten $\nabla f(x, y)$.

b) Bestem samtlige stationære punkter for f, og undersøg om f har lokalt ekstremum i dem. Angiv i givet fald arten af det lokale ekstremum og beskriv grafen for det approksimerende polynomium af anden grad for f med det givne stationære punkt som udviklingspunkt.

c) Vi betragter den afsluttede trekant T som har hjørnerne $(0, 0)$, $(2, 0)$ og $(2, 2)$. Bestem det globale minimum og det globale maksimum af restriktionen af f til T, og angiv de punkter hvori de antages.

d) Bestem værdimængden af restriktionen af f til T.

|||| Opgave 3 Lokale undersøgelser af funktion af to variable. Essay

I denne opgave undersøges vha. `Maple` funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = x^3y + xy^3 - x^3 - 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 5x^2 + 13xy + 5y^2 - 7x - 8y + 3\,.$$

a) Vis at den retningsafledede af f i punktet $(1, 1)$ i retningen mod punktet $(1, 2)$ er lig med 1. Find alle de retninger (angivet ved enhedsvektorer) fra punktet $(1, 1)$ hvori den retningsafledede af f er lig med 1.

b) Vis at restriktionen af f til cirklen C med centrum $(2, 1)$ og radius $\sqrt{2}$ er 0 overalt.

Vi betragter i det følgende punkterne $P = (1, 0)$ og $Q = (2, 1)$.

c) Gør rede for at P og Q er stationære punkter for f, hvor man ikke umiddelbart kan bruge Hessemetoden til at afgøre om de er steder for lokale esktrema. Kan undersøgelser at restriktionen af f til rette linjer gennem P og Q bringe os videre i den sag? Prøv først med restriktionen af f til en vandret og en lodret linje gennem punkterne.

d) Vis at f har egentligt lokalt ekstremum i Q.