Hjemmeopgavesæt 4

Egenværdiproblemer

Deadline er 28/11, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Möbius hvor de kan være tvistede i forhold til her. Möbius er åben på din klasses Inside konto fra torsdag 25/11 kl. 12. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I opgaverne til besvares i Möbius er det vigtigt du
- *kan finde egenværdier med tilhørende egenrum*
- *kan operere med afbildnings- og basisskiftematricer*
- *kan løse systemer af differentialligninger ved diagonaliseringsmetoden og sturktursætningen*
- *kan finde betingede løsninger og illustrere*

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *kan operere med ortonormale baser og ortogonale underrum*
- *kan praktisere GramSchmidt-algoritmen*
- *kan operere med afbildningsmatricer i forskellige baser*
- *kan foretage ortogonal substitution*
- *forstår prikproduktets betydning ved længder og vinkler*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

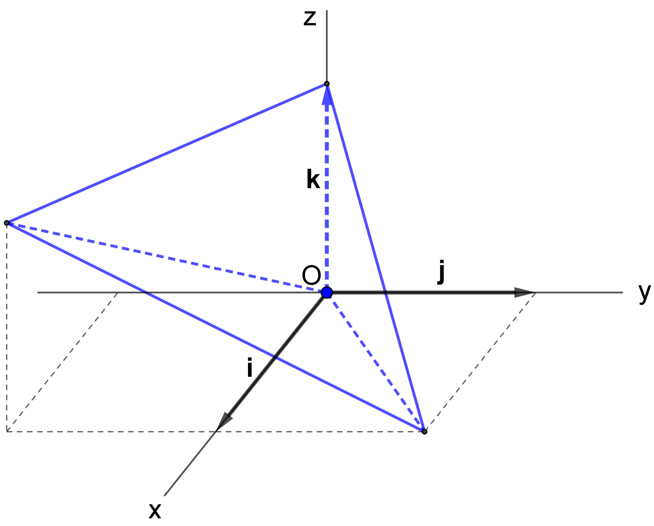
Opgave 1 Strækninger i rummet. Besvares i Möbius

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^3$ givet ved afbildningsmatricen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Bestem egenværdierne for f og deres tilhørende egenrum.

Et tetraeder T_1 har hjørnerne $(0,0,0), (1,1,0), (0,0,1)$ og $(1,-1,1)$, se figuren.



b) Gør rede for at afbildningen ved f af T_1's hjørner består i en strækning af dem i retningen væk fra Origo. Angiv for hvert af punkterne strækningsfaktoren, og bestem de fire punkter hvori hjørnerne afbildes. De fire punkter betragtes som hjørnepunkter for et nyt tetraeder T_2. Find en sammenhæng mellem volumen af T_1 og T_2 og de nævnte strækningsfaktorer.

c) Hjørnerne i T_1 er billeder ved f af hjørnerne i et tetraeder T_0. Bestem volumen af T_0.

Opgave 2 System af differentialligninger. Besvares i Möbius

Et inhomogent system af differentialligninger er givet på matrixform ved

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}.$$

a) Find en partikulær løsning til systemet ved at gætte på en løsning på formen

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos(t) + b\sin(t) \\ c\cos(t) + d\sin(t) \end{bmatrix}$$

og find derefter den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet ved hjælp af struktursætningen (sammenlign Sætning 6.37 og opgaverne på Uge 12, Store Dag).

b) Bestem den løsning til differentialligningssystemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Løsningen ønskes illustreret på to måder. Først tegnes x_1 og x_2 som to funktioner af t i et passende interval omkring $t = 0$. Dernæst tegnes den banekurve punktet (x_1, x_2) passerer når tiden t løber gennem et passende interval omkring $t = 0$.

|||| Opgave 3 Essayopgave: På opdagelserejse gennem underrum i $\mathbb{R}^5$

I $\mathbb{R}^5$ er givet vektorerne $\mathbf{a}_1 = (0,1,2,2,0)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,4,0,0)$, $\mathbf{a}_3 = (1,2,6,2,1)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,2,2,6,-1)$, $\mathbf{a}_5 = (2,-2,0,1,0)$ og $\mathbf{a}_6 = (-2,-2,1,0,0)$.

a) Vis at $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ udspænder et 3-dimensionalt rum U, og at $\mathbf{a}_4 \in U$. Skriv $\mathbf{a}_4$ som en linearkombination af $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

b) Vis at der findes en ortonormal basis $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ for U således at $\mathbf{q}_1$ er proportional med $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{q}_2$ er proportional med $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$. Angiv en sådan basis som en linearkombination af $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$.

c) Gør rede for at $\mathbf{a}_5$ og $\mathbf{a}_6$ tilhører det ortogonale komplement $U^\perp$ til U, og redegør for at den i forrige spørgsmål omtalte basis for U kan udvides til en ortonormal basis $q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5)$ for $\mathbb{R}^5$.

Lad nu $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ være en lineær afbildning for hvilken $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ er egenvektorer hørende til egenværdierne $\lambda_1 = 1$ henholdsvis $\lambda_2 = -1$, således at $f(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_4$ og $\ker(f) = U^\perp$.

d) Bestem afbildningsmatricen for f med hensyn til basen q, og gør rede for at f er *isometrisk* (vinkel- og længdebevarende) på U, men ikke på $\mathbb{R}^5$.

e) Bestem afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbasen e for $\mathbb{R}^5$, og vis den er symmetrisk.