Hjemmeopgavesæt 4

Egenværdiproblemer

Deadline er 29/11, 23:55. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Maple TA hvor de kan være tvistede i forhold til her. Maple TA er åben på din klasses Inside konto fra torsdag 26/11 kl. 12. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til Opgaver på din klasses Inside konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I opgaverne til besvares i Maple TA er det vigtigt du
- *kan finde egenværdier med tilhørende egenrum*
- *kan afgøre om givne matricer er similære*
- *kan operere med afbildnings- og basisskiftematricer*
- *kan løse systemer af differentialligninger ved diagonaliseringsmetoden*
- *kan finde betingede løsninger og illustrere*

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *kan operere med ortonormale baser og ortogonale underrum*
- *kan praktisere GramSchmidt-algoritmen*
- *kan operere med ortogonal substitution*
- *forstår prikproduktets betydning ved længder og vinkler*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Opgave 1 Similære matricer, besvares i Maple TA

Der er givet matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 110 & -140 \\ 84 & -107 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 61 & 42 \\ -84 & -58 \end{bmatrix}.$$

a) Bestem egenværdierne og deres tilhørende egenrum for såvel $\mathbf{A}$ som for $\mathbf{B}$.

b) Gør rede for at $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er similære matricer.

c) Betragt nu $\mathbf{A}$ som afbildningsmatrix for en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med hensyn til standardbasis i $\mathbb{R}^2$. Bestem en ny basis $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ for $\mathbb{R}^2$ med hensyn til hvilken $\mathbf{B}$ er afbildningsmatrix for f.

Opgave 2 Begyndelsesværdiproblemer, besvares i Maple TA

Lad $a \in \mathbb{R}$. Et system af differentialligninger er givet på matrixform ved

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 & a+2 \\ 1 & -2 & -1 \\ a+2 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

a) Opstil for $a = -1$ den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet på vektorform, og find de løsninger udtrykt i reelle funktioner som opfylder begyndelsesværdibetingelserne

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix}, \; n \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

b) Løsningerne fundet i forrige spørgsmål fortolkes nu som kurver i rummet. Lav et samlet 3d-plot med de seks løsninger set for $t \in [0,2]$.

Opgave 3 Essayopgave: På opdagelse med Maple gennem underrum i $\mathbb{R}^4$

I $\mathbb{R}^4$ er der givet et underrum $U_1 = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ hvor

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,-1,1) \text{ og } \mathbf{v}_2 = (-2,3,2,3).$$

a) Vis at $\dim(U_1) = 2$.

Lad $\mathbf{V}$ betegne matricen $[\,\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2\,]$. Kernen for den lineære afbildning $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ som har afbildningsmatricen $\mathbf{V}^\top$ med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^2$, danner et nyt underrum U_2 i $\mathbb{R}^4$.

b) Vis at $\dim(U_2) = 2$, og at U_1 og U_2 er ortogonale.

c) Opstil en ortonormal basis $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ for $\mathbb{R}^4$ hvor $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in U_1$ og $(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \in U_2$.

Lad a være et reelt tal. En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved at enhver vektor i U_1 afbildes på den selv multipliceret med a, mens enhver vektor i U_2 afbildes på dens modsatte vektor multipliceret med 2.

d) Bestem en afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ for f med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^4$.

I det følgende forudsættes $a \neq 0$.

e) Givet $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1,1)$ og $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,1)$. Bestem vinklen mellem $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ og vinklen mellem $f(\mathbf{u}_1)$ og $f(\mathbf{u}_2)$.

f) Findes der værdier af a for hvilke f er en vinkelbevarende afbildning?

g) Findes der værdier af a for hvilke f er en længdebevarende afbildning?