Hjemmeopgavesæt 3

Vektorrum og Lineære afbildninger

Deadline er 7/11, 23:00. Opgave 1 og 2 skal ikke afleveres, men besvares i Möbius hvor de kan være tvistede i forhold til her. Möbius er åben på din klasses Inside konto fra torsdag 4/11 kl. 12. Opgave 3 er en essay-opgave, og din besvarelse skal uploades i pdf til din klasses Learn konto. Husk navn og studienummer øverst i besvarelsen.

I essay-opgaven vil der blive lagt særlig vægt på at du kan
- *afgøre om en given mængde af vektorer er en basis for et givet rum*
- *afgøre om en given afbildning er lineær*
- *operere med koordinater, vektorer og afbildningsmatricer*
- *operere med basisskifte*
- *bestemme kernen for en lineær afbildning og anvende dimensionssætningen*
- *håndtere underrum*
- *skrive sammenhængende og præcist og udføre simple matematiske ræsonnementer*

I opgaverne til besvarelse i Maple TA er det vigtigt du kan
- *afgøre om en given mængde er et underrum af et vektorrum*
- *operere med basis og koordinater i vektorrum og deres underrum*
- *kan afgøre om en 1. ordens differentialligning er lineær*
- *benytte såvel strukture sætning som Panserformel på 1. ord. lin. diff.ligninger*
- *finde betingede løsninger til disse og plotte dem*

Opgave 1 Polynomiumsrummet $P_2(\mathbb{R})$. Besvares i Möbius

I vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ bestående af reelle polynomier af grad højst 2 betragtes delmængden $U = \{P(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid P(4) = 0\}$.

a) Vis at U er et underrum af vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$.

b) Udvælg en basis for U i den følgende liste af fem polynomier:
$\{\, 4 - x\,,\ 4 - x^2\,,\ 8 - 2x\,,\ 16 - 8x + x^2\,,\ 12 - 7x + x^2 \,\}$.

c) Angiv en lineær afbildning $f: \ P_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ som har U som kerne.

Opgave 2 Diff-ligning med begyndelsesbetingelser. Besvares i Möbius

Der er givet en førsteordens differentialligning ved:

$$x'(t) + 2x(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,,\; t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

a) Gør rede for at differentialligningen er lineær.

b) Vis at der findes en linearkombination af $\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$ og $\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$ som er en partikulær løsning til (1), og find ved hjælp heraf den fuldstændige løsning.

c) Løs differentialligningen ved hjælp af Panserformlen.

d) Plot de fem løsninger som opfylder begyndelsesværdibetingelserne:

$$x(0) = a\,,\;\; \text{hvor}\;\; a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\,.$$

e) Findes der løsninger hvis grafers tangenthældning i skæringspunktet på andenaksen har samme værdi som funktionen selv. Eller den modsatte værdi af funktion selv?

Opgave 3 En lineær afbildning og dens omvendte. Essay-opgave

En afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}.$$

a) Gør rede for at f er lineær og opstil afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbaserne $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ i $\mathbb{R}^4$ og $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i $\mathbb{R}^3$. Bestem billedvektoren $\mathbf{y} = f(2, -1, 0, -1)$.

b) Bestem en basis for kernen for f og bestem dimensionen af billedrummet $f\left(\mathbb{R}^4\right)$.

Vi sætter $\mathbf{w}_1 = f(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{w}_2 = f(\mathbf{e}_2)$ og $\mathbf{w}_3 = f(\mathbf{e}_4)$, og betragter vektorsættet
$w = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.

c) Vis at w er en basis for $\mathbb{R}^3$, og bestem koordinatvektoren ${}_w\mathbf{y}$ for den i spørgsmål a) nævnte vektor $\mathbf{y}$.

En lineær afbildning $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved billederne

$$g(\mathbf{w}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\; g(\mathbf{w}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \;\text{ og }\; g(\mathbf{w}_3) = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,.$$

d) Bestem afbildningsmatricen for g med hensyn til basen w i $\mathbb{R}^3$ og standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Bestem $g(\mathbf{y})$.

e) Gør rede for at den sammensatte afbildning $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ givet ved

$$h(\mathbf{x}) = g\,(f(\mathbf{x}))$$

er lineær, og bestem afbildningsmatricen for h med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Vis at h afbilder underrummet $U = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4\}$ på U selv, og kommentér.