Hjemmeopgavesæt 1

Komplekse tal og funktioner

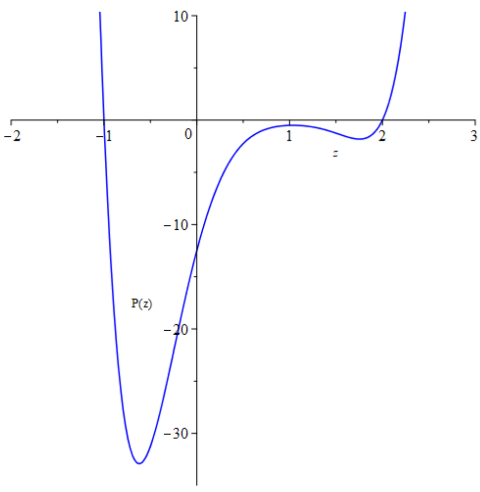
I vurderingen af dette sæt vil der blive lagt særlig vægt på at du
- *behersker elementære udregninger med komplekse tal*
- *kan veksle mellem et komplekst tals rektangulære og eksponentielle form*
- *kender sammenhæng mellem rødderne i et polynomium og en faktorisering af polynomiet*
- *behersker nedstigningssætningen*
- *kender strukturen af de komplekse rødder til et polynomium med reelle koefficienter*
- *har indsigt i den komplekse eksponentialfunktions struktur*
- *kender elementære regler for differentiation og kan opstille approksimerende polynomier*
- *skriver sammenhængende og præcist og kan udføre simple matematiske ræsonnementer*

Dette sæt af opgaver løses ved håndregning (eller simuleret håndregning). Din egen, individuelt udformede besvarelse af sættet uploades senest 26. september kl. 23:55, sted offentliggøres senere.

Opgave 1 Faktorisering af Polynomier

Et reelt polynomium P er givet ved

$$P(z) = (z^2 - 2z + \frac{5}{4}) \cdot (4z^4 - 12z^3 + 5z^2 + 11z - 10)\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$



På figuren ses et udsnit af grafen for P's restriktion til realaksen.

a) Hvilken grad har P?

b) Bestem samtlige rødder i P, angiv deres algebraiske multiplicitet og opskriv P på fuldstændig faktoriseret form. Vink: Brug nedstigningssætningen.

|||| Opgave 2 Omskrivninger ml. rektangulær og eksponentiel form

a) Tre komplekse tal er givet ved polære koordinater således:

$$z_1 = \left(1, -\frac{7\pi}{4}\right)\,,\ z_2 = (8, 7\pi) \ \text{ og } \ z_3 = \left(2, \frac{7\pi}{6}\right)\,.$$

Bestem de tre tals hovedargument, og opskriv dem på såvel eksponentiel som rektangulær form.

b) Bestem de følgende 3 tals eksponentielle form:

$$A = 2 - 2\sqrt{3}\,i\,, \quad B = \sqrt{6} + \sqrt{2}\,i \quad \text{og} \quad C = \frac{A^6}{B^8}\,.$$

|||| Opgave 3 Løsning af ligninger

a) Givet den binome ligning

$$z^6 = -729\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Bestem alle rødder og illustrér.

b) Givet den eksponentielle ligning

$$\mathrm{e}^z - i\,\mathrm{e}^{\pi} = 0\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Bestem de løsninger til ligningen hvis absolutværdi er mindre end 2π.

Opgave 4 Intro til hyperbolske funktioner

De hyperbolske funktioner $\cosh$ og $\sinh$ kan indføres ved hjælp af den naturlige eksponentialfunktion således:

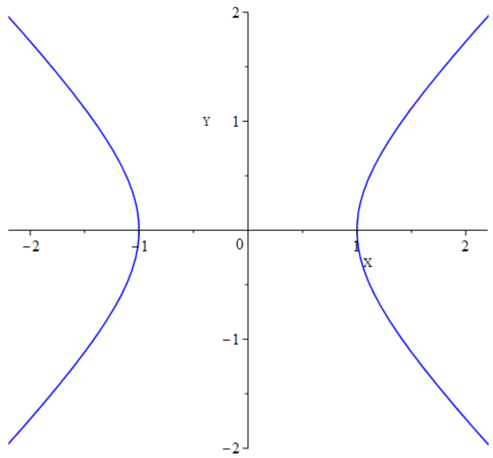
$$\cosh(v) = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2} \quad \text{og} \quad \sinh(v) = \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}, \; v \in \mathbb{R}.$$

a) Vis at $\cosh$ og $\sinh$ opfylder det minimalistiske *differentialligningssystem*

$$\begin{aligned} f'(v) &= g(v) \\ g'(v) &= f(v) \end{aligned}$$

med *begyndelsesværdibetingelserne* $f(0) = 1$ og $g(0) = 0$.

b) Gør rede for at det komplekse tal $-\cosh(v) + i\sinh(v)$ for ethvert $v \in \mathbb{R}$ ligger på den venstre gren af *enhedshyperblen* med ligningen $x^2 - y^2 = 1$, mens $\cosh(v) + i\sinh(v)$ ligger på den højre gren.



Enhedshyperblen givet ved ligningen $x^2 - y^2 = 1$

c) Der er givet funktionen

$$f(x) = \frac{1}{10}\sinh\left(x^2 - x\right), \; x \in \mathbb{R}.$$

Bestem de approksimerende polynomiumer $P_2(x)$ og $P_3(x)$ af grad 2 og 3 for $f(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 0$. Illustrér.

SLUT