Essay-besvarelse af hjemmeopgavesæt 1, opgave 4.

rev. 03.10.20.KS

I denne opgave opgave indfører vi de såkaldte hyperbolske funktioner, cosh og sinh. I analogi med de mere kendte trigonometriske funktioner, cos og sin, opfylder de et simpelt differentialligningssystem med begyndelsesværdibetingelser. Vi starter derfor med cos og sin.

1. Om cos og sin

Hvis vi sætter $f(x) = \cos(x)$ og $g(x) = \sin(x)$ for $x \in \mathbb{R}$, gælder der:

$$f'(x) = \cos'(x) = -\sin(x) = -g(x)$$
$$g'(x) = \sin'(x) = \cos(x) = f(x)$$

og endvidere

$$f(0) = \cos(0) = 1$$
$$g(0) = \sin(0) = 0$$

Vi ser herved at cos og sin opfylder differentialligningssystemet

$$f'(x) = -g(x)$$
$$g'(x) = f(x)$$

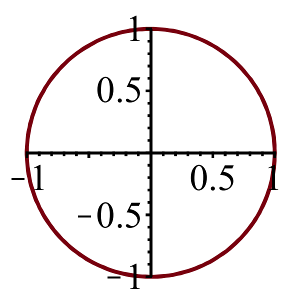
med begyndelsesværdibetingelserne $f(0) = 1$ og $g(0) = 0$.

For et vilkårligt tal $v \in \mathbb{R}$ gælder ifølge "idiotreglen":

$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$$

som viser at det komplekse tal $\cos(v) + i \cdot \sin(v)$ ligger på enhedscirklen med ligningen $x^2 + y^2 = 1$.

Jeg har som illustration plottet $\cos(v) + i \cdot \sin(v)$, $v \in [0, 2\pi]$ med Maple's complexplot:



2. Om cosh og sinh

Vi betragter to funktioner $f(x)$ og $g(x)$ som for $x \in \mathbb{R}$ opfylder differentialligningssystemet S givet ved

$$f'(x) = g(x)$$
$$g'(x) = f(x)$$

med begyndelsesværdibetingelserne $f(0) = 1$ og $g(0) = 0$. Vi indfører hjælpefunktionen $h(v) = (f(v))^2 - (g(v))^2$. Der gælder da for $v \in \mathbb{R}$:

$$h'(v) = 2 f(v) \cdot f'(v) - 2 \cdot g(v) \cdot g'(v) = 2(f(v) \cdot g(v) - g(v) \cdot f(v)) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Vi ser heraf at h er konstant på hele $\mathbb{R}$ og bestemmer konstanten

$$h(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = 1^2 + 0^2 = 1$$

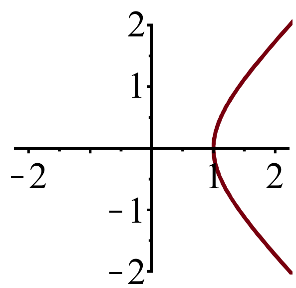
Heraf ses samlet at

$$(f(v))^2 - (g(v))^2 = 1,\ v \in \mathbb{R}.$$

Det viser at det komplekse tal $h(v) = f(v) + i \cdot g(v),\ v \in \mathbb{R}$, ligger på enhedshyperblen med ligningen $x^2 - y^2 = 1$.

Da $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cos(h)$, $\cosh(0) = 1$ og $\sinh(0) = 0$, opfylder $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ differentialligningssystemet S med de givne begyndelsesværdibetingelser. Vi ser heraf at det komplekse tal $h(v) = \cosh(v) + i \cdot \sinh(v),\ v \in \mathbb{R}$, ligger på enhedshyperblen med ligningen $x^2 - y^2 = 1$.

Jeg har som illustration plottet $\cosh(v) + i \cdot \sinh(v)$, $v \in [0, 2\pi]$ med Maple's complexplot:



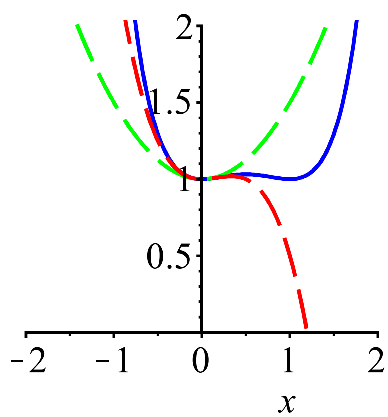
3. Approksimerende polynomier for $\cosh(x^2 - x)$

For en glat funktion $f(x)$ er det approksimerende polynomium af grad n med udviklingspunktet x_0 givet ved

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Jeg har fundet de approksimerende polynomier af grad 2 og 3 for $f(x) = \cosh(x^2 - x)$ og plottet dem ved hjælp af Maple (se bilag):

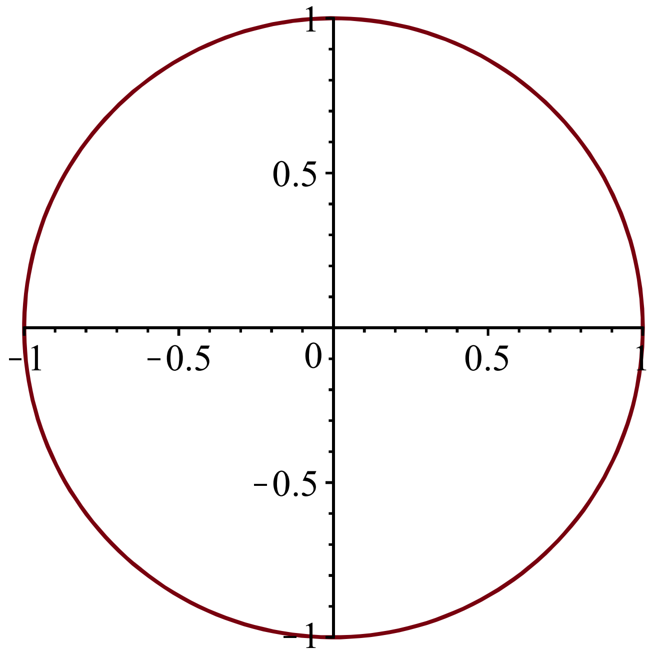
$$P_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} \text{ og } P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3.$$



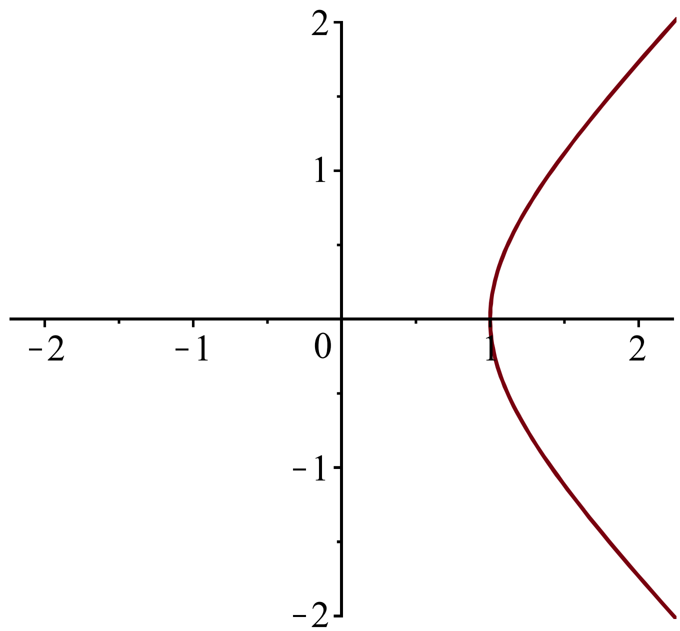
I plottet er f blå, P_2 er grøn, mens P_3 er rød. Det fremgår at P_3 approksimerer bedre end P_2 når x er tæt på 0, men på den anden side af ca. $x = 1$ er det omvendt!

Bilag

```
> restart:
> with(plots):
> complexplot(cos(v)+I*sin(v),v=0..2*Pi,scaling=constrained)
```




```
> complexplot(cosh(v)+I*sinh(v),v=-3..3,scaling=constrained,view=[-
  sqrt(5)..sqrt(5),-2..2])
```




```
> f:=x->cosh(x^2-x);
```

$$f := x \mapsto \cosh\left(x^2 - x\right) \tag{1.1}$$

```
> a0:=f(0);
```

$$a0 := 1 \tag{1.2}$$

```
> a1:=D(f)(0);
```

$$a1 := 0 \tag{1.3}$$

```
> a2:=1/2*D[1,1](f)(0);
```

$$a2 := \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

```
> a3:=1/6*D[1,1,1](f)(0);
```

$$a3 := -1 \tag{1.5}$$

```
> P[2]:=x->a0+a1*x+a2*x^2;
  P[3]:=x->a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3;
```

$$P_2 := x \mapsto a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot x^2$$

$$P_3 := x \mapsto a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot x^2 + a3 \cdot x^3 \tag{1.6}$$

```
> 'P[2](x)'=P[2](x);'P[3](x)'=P[3](x);
```

$$P_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 \tag{1.7}$$

```
> plot1:=plot(f(x),x=-2..2,color=blue):
  plot2:=plot(P[2](x),x=-2..2,color=green,linestyle=dash):
  plot3:=plot(P[3](x),x=-2..2,color=red,linestyle=dash):
  plots[display](plot1,plot2,plot3,view=0..2);
```