Skriftlig 2-timersprøve, December 2018, Opgave 3

I $\mathbb{R}^3$ udstyret med det sædvanlige prikprodukt ser vi på vektorsættet

$$v = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}) = ((1,1,1),(1,0,-1),(-1,1,0)).$$

1.

Vi ønsker at gøre rede for, at v er en basis for $\mathbb{R}^3$. Til en basis for $\mathbb{R}^3$ skal der bruges 3 lineært uafhængige vektorer. Da v består af 3 vektorer, tjekker vi derfor om de er lineært uafhængige. Vektorerne opstilles som søjler i en 3×3-matrix V:

$$V = (\boldsymbol{v_1}\ \boldsymbol{v_2}\ \boldsymbol{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanten af V bestemmes med `Maple` (se bilag 1, lign. (1.2)) til

$$\det(V) = 3.$$

Da determinanten er forskellig fra 0, har V fuld rang, og det er hermed vist, at $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ og $\boldsymbol{v_3}$ er lineært uafhængige. Dermed udgør v en basis for $\mathbb{R}^3$.

Vi kigger nu på den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defineret ved

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}) &= 5\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}\}, \\ f(\boldsymbol{u}) &= -4\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}. \end{aligned}$$

2.

Vi er interesserede i at bestemme afbildningsmatricen ${}_vF_v$ for f mht. basis v. Af definitionen for f ses det, at 5 og -4 er egenværdier for f med tilhørende egenrum $E_5 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}\}$ og $E_{-4} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$. Da vi allerede har vist, at $\boldsymbol{v_2}$ og $\boldsymbol{v_3}$ er lineært uafhængige, udgør v en egenbasis for f. Dermed er afbildningsmatricen ${}_vF_v$ en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

$${}_vF_v = ({}_vf(\boldsymbol{v_1})\ \ {}_vf(\boldsymbol{v_2})\ \ {}_vf(\boldsymbol{v_3})) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi er også interesserede i at kunne skifte til standardkoordinater og vil derfor opskrive afbildningsmatricen ${}_eF_e$ for f mht. standardbasis. For at kunne skifte koordinater skal vi benytte os af en basisskiftematrix. Vi kender allerede den basisskiftematrix ${}_eM_v$, der skifter fra e- til v-koordinater. Det er nemlig matricen V, hvor vektorene fra v er opskrevet mht. standardbasis e:

$${}_eM_v = V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu kan basisskiftematricen ${}_vM_e$, der skifter fra v- til e-koordinater bestemmes, som den inverse af ${}_eM_v$. Dette gøres med `Maple` (se bilag 1, lign. (1.5)):

$$ {}_vM_e = ({}_eM_v)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. $$

Afbildningsmatricen ${}_eF_e$ kan nu bestemmes ved matrixproduktet ${}_eM_v \cdot {}_vF_v \cdot {}_vM_e$. Matrixproduktet bestemmes vha. `Maple` (se bilag 1, lign. (1.6)) og afbildningsmatricen kan opskrives:

$$ {}_eF_e = {}_eM_v \cdot {}_vF_v \cdot {}_vM_e = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} $$

Vi lægger mærke til at ${}_eF_e$ er en symmetrisk matrix, som kan diagonaliseres vha. en egenbasis som f.eks. v.

3.

Vi ønsker at bestemme en ortonomal basis q for $\mathbb{R}^3$, som består af egenvektorer for f, hvoraf én vektor i q er ensrettet med $\boldsymbol{v_3}$. Vi kender allerede egenbasis v. Da ${}_eF_e$ er symmetrisk, vides det også, at egenrummene E_5 og E_{-4} er ortogonale. Vi skal derfor finde en ortonomal basis for E_5 og E_{-4} hver for sig for at kunne sammensætte en ortonomal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for f. Først normaliseres $\boldsymbol{v_1}$ og dermed dannes en ny vektor $\boldsymbol{q_1}$:

$$ \boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1). $$

En ortonormal basis for E_5 består nu af $\boldsymbol{q_1}$.

Nu skal findes en ortonormal basis for E_{-4}, hvoraf én vektor ensrettes med $\boldsymbol{v_3}$. Derfor normaliseres først $\boldsymbol{v_3}$ hvorved vektoren $\boldsymbol{q_3}$ dannes:

$$ \boldsymbol{q_3} = \frac{\boldsymbol{v_3}}{\|\boldsymbol{v_3}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0). $$

Til sidst dannes $\boldsymbol{q_2}$ som krydsproduktet mellem $\boldsymbol{q_1}$ og $\boldsymbol{q_3}$ (se bilag 1, lign. (1.9)):

$$ \boldsymbol{q_2} = \boldsymbol{q_1} \times \boldsymbol{q_3} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, -1, 2). $$

En ortonomal basis for E_{-4} er nu $(\boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{q_3})$, hvor $\boldsymbol{q_3}$ er ensrettet med $\boldsymbol{v_3}$. Den ønskede ortonomale basis q for $\mathbb{R}^3$ er derfor $q = (\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{q_3})$.

Bilag 1

```
> restart; with(LinearAlgebra):
```

Vektorsættet defineres:

```
> v1:=<1,1,1>:
  v2:=<1,0,-1>:
  v3:=<-1,1,0>:
```

1)

De tre vektorer sættes op som søjler i matricen V:

```
> V:=<v1|v2|v3>;
```

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Determinanten af V bestemmes:

```
> Determinant(V);
```

$$3 \tag{1.2}$$

2)

Afbildningsmatricen ${}_vF_v$ er en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen:

```
> vFv:=DiagonalMatrix(<5,-4,-4>);
```

$$vFv := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Basisskiftematricerne *eMv* og *vMe* opstilles:

```
> eMv:=V;
```

$$eMv := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

```
> vMe:=eMv^(-1);
```

$$vMe := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Afbildningsmatricen *eFe* fås nu ved basisskifte:

```
> eFe:=eMv.vFv.vMe;
```

(1.6)

$$eFe := \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

3)

v_1 normaliseres:

```
> q1:=v1/norm(v1,2);
```

$$q1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

v_3 normaliseres:

```
> q3:=v3/norm(v3,2);
```

$$q3 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

q_2 bestemmes som krydsproduktet mellem q_1 og q_3:

```
> q2:=CrossProduct(q1,q3);
```

$$q2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$