DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 6. december 2010.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for efterårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Givet to komplekse tal $a=\sqrt{3}-i$ og $b=4_{\frac{\pi}{3}}$.

1. Bestem absolutværdien og hovedargumentet af a.
2. Løs ligningen $a\cdot z=b$.
3. En kompleks ligning af formen $(z+2i)^3=c$ har a som en løsning. Bestem ligningens højreside c.
4. Find et komplekst tal d som opfylder at $\mathrm{e}^d=b$.

OPGAVE 2

Lad $\mathbf{A}$ betegne koefficientmatricen og $\mathbf{T}$ totalmatricen for et inhomogent lineært ligningssystem. $\mathbf{T}$ har været undersøgt med Maple således:

```
> ReducedRowEchelonForm(T);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Angiv antallet af ubekendte i ligningssystemet, og bestem rangen af $\mathbf{A}$ og rangen af $\mathbf{T}$.
2. Opskriv to forskellige løsninger til ligningssystemet.

Lad $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning hvis afbildningsmatrix med hensyn til standardbasen $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$ for $\mathbb{R}^4$ er identisk med $\mathbf{A}$ (dvs. koefficientmatricen som er nævnt, men ikke vist, ovenfor).

3. Find en basis for kernen for f.
4. Gør rede for at $\big(f(\mathbf{e}_1),f(\mathbf{e}_2),f(\mathbf{e}_3)\big)$ er en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$ for f, og bestem koordinaterne for $f(\mathbf{e}_4)$ med hensyn til denne basis.

OPGAVE 3

Et system bestående af to førsteordens lineære differentialligninger med de ukendte funktioner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ har systemmatricen $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

1. Opskriv differentialligningssystemet.

Maple giver:

```
> Eigenvectors(A,output=list);
```

$$\left[\left[2, 1, \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[-3, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

2. Opskriv ved hjælp af ovenstående Maple output den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.

3. Antag at $x_1(t)$ og $x_2(t)$ for et givet $t_o \in \mathbb{R}$ og et givet $k \in \mathbb{R}$ opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_1(t_o) = x_2(t_o) = k$. Vis at $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i så fald er identiske.

OPGAVE 4

En reel funktion f af to reelle variable er givet ved:

$$f(x,y) = \frac{e^x}{y}.$$

1. Bestem definitionsmængden for f.

2. Udregn funktionsværdien af f i de følgende tre punkter: $A(1,1)$, $B(0,1)$ og $C(-1, \frac{1}{e})$. To ud af de tre punkter ligger på den samme niveaukurve for f. Beskriv denne niveaukurve.

3. Bestem gradienten af f i punktet $(1,1)$, og find den retningsafledede af f i den retning der er bestemt ved vektoren $\mathbf{s} = (1,-1)$.

For $u > 0$ er der i $(x,y)-$planen givet den parametriserede kurve $\mathbf{r}(u) = (u,u)$. Endvidere er der givet den sammensatte funktion $h(u) = f\big(\mathbf{r}(u)\big)$.

4. Bestem det punkt $\mathbf{r}(u_\circ)$ i $(x,y)-$planen, for hvilket $h'(u_\circ) = 0$.

- Slut -