DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 14. maj 2019.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En reel funktion f af to reelle variable er givet ved

$$f(x,y) = \frac{y}{\mathrm{e}^x} \text{ hvor } (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

1. Bestem niveaukurverne for f svarende til niveauerne 0 og 1.
2. Bestem den retningsafledede af f i punktet $(0,1)$ i retningen mod punktet $(1,2)$, og find den største værdi den retningsafledede af f i punktet $(0,1)$ kan opnå.

En kurve K i (x,y)-planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = \begin{bmatrix} u \\ 1+u-u^2 \end{bmatrix},\ u \in \mathbb{R} .$$

3. Bestem de punkter på K hvori gradienten for f og tangentvektoren $\mathbf{r}'(u)$ er ortogonale.

OPGAVE 2

Det oplyses at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenværdierne 1 og 3 med tilhørende egenrum $E_1 = \text{span}\{(1,1)\}$ og $E_3 = \text{span}\{(-1,1)\}$. Et andengradspolynomium i to reelle variable er givet ved

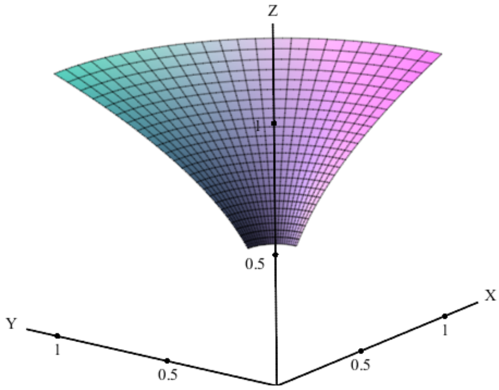
$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 2y + 2 .$$

1. I forskriften for f indgår der en kvadratisk form. Angiv en positiv ortogonal basisskiftematrix $\mathbf{Q}$ der reducerer den kvadratiske form, således at den i de nye (x_1,y_1)-koordinater ikke indeholder "blandede led", dvs. produktled af typen $x_1 \cdot y_1$.
2. Hvis man benytter et basisskifte som beskrevet i forrige spørgsmål, kan f skrives på den reducerede form
$$f(x,y) = f_1(x_1,y_1) = a(x_1-c)^2 + b(y_1-d)^2 .$$
Bestem tal a,b,c og d der opfylder dette, og lad (x_0,y_0) betegne (x,y)-koordinaterne for punktet (c,d) . Gør rede for at f har lokalt minimum i (x_0,y_0) .

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

Lad a være et positivt reelt tal. En flade F i (x,y,z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u,v) = \left(u^3\cos(v), u^3\sin(v), u\right)$, $u \in [1/2, 1]$, $v \in [0, a]$. På figuren ses F for $a = \frac{\pi}{2}$.



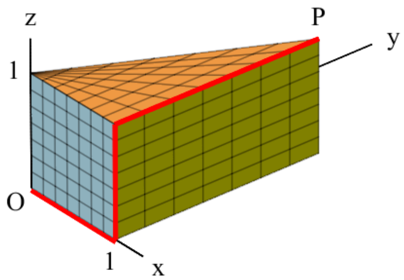
1. Gør rede for at F er en omdrejningsflade, og tegn den profilkurve i (x,z)-planen der benyttes ved drejningen.
2. Bestem den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobifunktion.
3. Betragt en massetæthedsfunktion i (x,y,z)-rummet som i ethvert punkt på F har den samme værdi som den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobifunktion. Hvilken værdi skal a antage for at F opnår massen 1?

OPGAVE 4

En trekant T i (x,y)-planen har hjørnerne $(0,0), (1,0)$ og $(1,2)$.

1. Angiv en parameterfremstilling for T.

Med Ω betegnes den punktmængde i (x,y,z)-rummet som ligger lodret mellem T og planen med ligningen $z = 1$.



2. Angiv en parameterfremstilling for Ω og bestem den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion.

En funktion $f := \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er givet ved $f(x,y,z) = x^2yz$. Vi betragter vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$.

3. Bestem fluxen

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\mu\,.$$

4. En kurve K som løber langs tre kanter på Ω fra origo til punktet $P(1,2,1)$, er vist med rød på figuren. Bestem det tangentielle kurveintegral

$$\int_{K} \mathbf{V}\cdot\mathbf{e}\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Opgavesættet er slut.