DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 14. maj 2018.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En reel funktion f af to reelle variable er givet ved

$$f(x,y) = 4y\left(x^2 + \frac{y^2}{3} - 1\right) \,.$$

1. Bestem samtlige lokale maksima og minima for f og angiv de punkter hvori de antages.

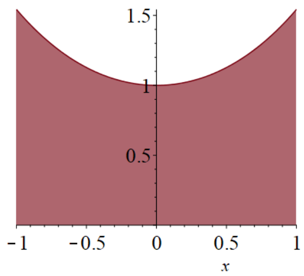
En ellipse E i (x,y)-planen er givet ved ligningen

$$x^2 + \frac{y^2}{3} - 1 = 0\,.$$

2. Bestem E's centrum og halvakser.
3. Bestem det globale maksimum og det globale minimum af f på den afsluttede punktmængde der omkrandses af E.

OPGAVE 2

I (x,y)-planen betragtes punktmængden $B = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq \cosh(x)\}$.



1. Bestem en parameterfremstilling for B.

En højdefunktion h defineret på (x,y)-planen er givet ved

$$z = h(x,y) = 2 - x\,.$$

Lad F betegne den del af grafen for h som ligger lodret over B.

2. Find en parameterfremstilling for F, og bestem den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion.
3. Bestem fladeintegralet $\int_F \frac{z-1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}\mu$.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

Det oplyses at det lineære førsteordens differentialligningssystem

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x(t) - 10y(t) \\ 2x(t) - 5y(t) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

har den fuldstændige løsning

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c_1 + 2c_2\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

I (x,y)-planen betragtes vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y) = \begin{bmatrix} 4x - 10y \\ 2x - 5y \end{bmatrix}$.

1. Bestem den flowkurve $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ for $\mathbf{V}$ som opfylder $\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

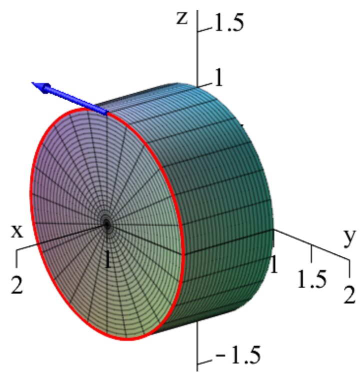
En kurve L er givet som det rette linjestykke fra punktet $(1,1)$ til punktet $(2,2)$.

2. Bestem en parameterfremstilling for L.

3. Lad nu L til tiden $t = 0$ begynde at flyde med $\mathbf{V}$ opfattet som hastighedsvektorfelt. Bestem en parameterfremstilling for den kurve som L er blevet deformeret til, til tiden $t = 1$.

OPGAVE 4

I (x,y,z)-rummet er der givet vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (3x - y^2, 4yz, y - 2z^2)$. Vi betragter desuden en massiv omdrejningscylinder Ω med bundradius 1 som har x-aksen som symmetrikase og er afgrænset af planerne $x = 0$ og $x = 1$, se figuren.



1. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.

Betragt den cirkelskive C beliggende i planen $x = 1$ som afslutter cylinderen i x-aksens retning, og dens randkurve ∂C som er vist med rød på figuren.

2. Find en parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v)$ for C, som opfylder højrekonventionen i forhold til den orientering af ∂C som er vist på figuren med blå vektor.

3. Bestem cirkulationen $\oint_{\partial C} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{\partial C} \, \mathrm{d}\mu$.

`Opgavesættet er slut.`