DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 13. maj 2017.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion f af to reelle variable er for $(x,y) \neq (0,0)$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

1. Vi betragter tre punkter i (x,y)-planen: $A=(0,1)$, $B=(0,-1)$ og $C=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Netop to af dem ligger på den samme niveaukurve for f. Hvilke to?

Det oplyses at gradienten for f er givet ved $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

2. Gør rede for at f ingen stationære punkter har.

Betragt den afsluttede og begrænsede punktmængde (en cirkelring) $M = \left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

3. Bestem det globale minimum og det globale maksimum af f på M, og angiv de punkter hvori det globale minimum og det globale maksimum antages.

OPGAVE 2

Om en reel funktion $f(x,y)$ oplyses at dens approksimerende andengradspolynomium med udviklingspunktet $(0,0)$ har forskriften

$$P_2(x,y) = 2 + \frac{1}{2}x^2 + y^2$$

mens dens approksimerende andengradspolynomium med udviklingspunktet $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ har forskriften

$$Q_2(x,y) = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{e}}\,y^2\,.$$

1. Bestem funktionsværdierne

$$f(0,0),\ f'_x(0,0),\ f'_y(0,0),\ f''_{xx}(0,0),\ f''_{yy}(0,0)\ \text{ og }\ f''_{xy}(0,0)\,.$$

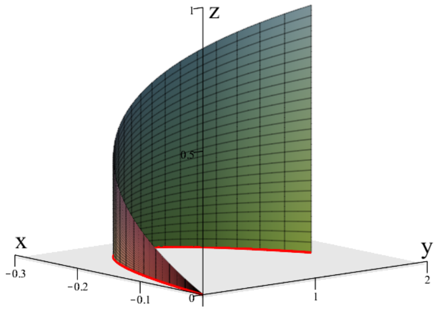
2. Gør rede for at $(0,0)$ er et stationært punkter for f, og undersøg om $f(0,0)$ er et egenligt lokalt minimum, et egentligt lokalt maksimum eller ingen af delene.

3. Gør rede for at også $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ er et stationært punkt for f, og undersøg om $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ er et egenligt lokalt minimum, et egentligt lokalt maksimum eller ingen af delene.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

En cylinderflade F i (x,y,z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u,v) = \left(u^2 - u\,,\, u^2 + u\,,\, vu\right)$ hvor $u \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ og $v \in [0,1]$.



1. Bestem den til $\mathbf{r}$ hørende Jacobifunktion, og brug denne til at bestemme arealet af F.

Lad L betegne den til F hørende ledekurve i (x,y)-planen (vist med rød på figuren).

2. Opskriv en parameterfremstilling for L, og bestem den til L hørende Jacobifunktion.
3. Bestem kurveintegralet $\displaystyle\int_L \frac{1}{2}(y-x)\,\mathrm{d}\mu$.

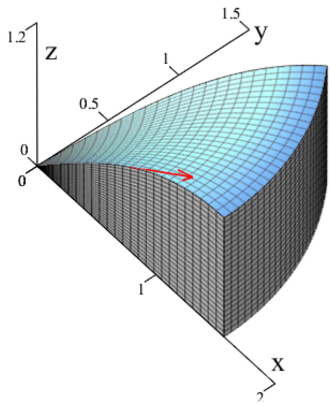
OPGAVE 4

Et vektorfelt i (x,y,z)-rummet er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (x^2, -2yx\,,\, z)$. I (x,z)-planen betragtes et profilområde A givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{s}(u,v) = (u, 0, v \cdot \sin(u))\,,$$

hvor $u \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ og $v \in [0,1]$.

Et massivt omdrejningslegeme Ω fremkommer ved at A drejes vinklen $\frac{\pi}{4}$ omkring z-aksen mod uret set fra z-aksens positive ende.



1. Giv en parameterfremstilling for Ω.
2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen af Ω.
3. Lad G betegne den del af overfladen af Ω, som afgrænser Ω opadtil (blå på figuren). Bestem cirkulationen af $\mathbf{V}$ langs med randkurven af G idet randkurven orienteres som antydet med pilen.

`Opgavesættet er slut.`