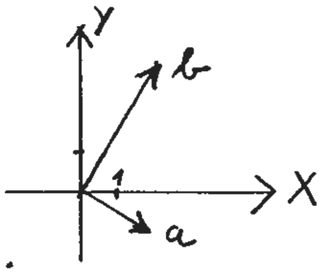
1 Mat 1. 2-timers prøve 6.12.2010.

Opgave 1.



$a = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$.

$b = 4_{\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 + 2\sqrt{3}\, i$.

1. $\underline{|a| = 2}$, $\underline{\operatorname{Arg}(a) = -\frac{\pi}{6}}$. Dvs. $a = 2_{-\frac{\pi}{6}}$.

2. $az = b \iff \underline{z} = \frac{b}{a} = \frac{4_{\frac{\pi}{3}}}{2_{-\frac{\pi}{6}}} = 2_{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} = 2_{\frac{\pi}{2}} = \underline{2i}$.

3. a er løsning til ligningen $(z+2i)^3 = c \iff$
$\underline{c} = (a+2i)^3 = (\sqrt{3}+i)^3 = (\sqrt{3}+i)^2(\sqrt{3}+i) = \underline{8i}$.

4. For $z = x+iy$ fås
$e^z = b \iff (e^x)_y = 4_{\frac{\pi}{3}} \iff e^x = 4$ og $y = \frac{\pi}{3} + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \iff$
$x = \ln 4 = 2\ln 2$ og $y = \frac{\pi}{3} + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$.
Samtlige $z \in \mathbb{C}$ som opfylder at $e^z = b$ er da
$z = x+iy = 2\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2p\pi\right),\ p \in \mathbb{Z}$.
Et muligt $d \in \mathbb{C}$ som opfylder at $e^d = b$ fås feks. for $p = 0$.
Dvs. $\underline{d = 2\ln 2 + i\frac{\pi}{3}}$.

Opgave 2.

Inhomogent lineært ligningssystem $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.

Af Mapleudskriften følger: Det fuldstændigt reducerede lineære ligningssystem.

$$\underline{\underline{T}} = [\underline{\underline{A}} \mid \underline{b}] \Rightarrow \operatorname{trap}(\underline{\underline{T}}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad \begin{cases} x_1 + 4x_4 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

1. $\underline{\text{Antal ubekendte} = 4}$ og $\underline{\rho(\underline{\underline{A}}) = \rho(\underline{\underline{T}}) = 3}$.

2. Sættes $x_4 = t$ fås
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -2, 0, 0) + t(-4, 0, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$.
To forskellige løsninger svarer til to forskellige værdier for t. Feks. $t = 0$ og $t = 1$.
For $t = 0$ fås løsningen $\underline{(3, -2, 0, 0)}$ og for $t = 1$ fås løsningen $\underline{(-1, -2, 2, 1)}$.

Opgave 2 fortsat.

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er lineær og ${}_e\underline{\underline{F}}_e = [{}_e\underline{f(\underline{e}_1)}\ {}_e\underline{f(\underline{e}_2)}\ {}_e\underline{f(\underline{e}_3)}\ {}_e\underline{f(\underline{e}_4)}] = \underline{\underline{A}}$.

3. $\underline{x} \in \ker f \Leftrightarrow {}_e\underline{\underline{F}}_e\,{}_e\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x} = t(-4,0,2,1),\ t \in \mathbb{R}$.
Dvs. $\ker f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} = t(-4,0,2,1),\ t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-4,0,2,1)\}$.
Vektoren $\underline{v} = (-4,0,2,1)$ er da en basis for $\ker f$.

4. Af Mapleudskriften følger:

$${}_e\underline{\underline{F}}_e = \left[{}_e\underline{f(\underline{e}_1)}\ {}_e\underline{f(\underline{e}_2)}\ {}_e\underline{f(\underline{e}_3)} \;\vdots\; {}_e\underline{f(\underline{e}_4)}\right] \Rightarrow \text{trap}({}_e\underline{\underline{F}}_e) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Heraf aflæses, at

① Billedvektorerne $f(\underline{e}_1)$, $f(\underline{e}_2)$ og $f(\underline{e}_3)$ er lineært uafhængige.

② $f(\underline{e}_4) = 4f(\underline{e}_1) - 2f(\underline{e}_3)$.

Da enhver linearkombination af $f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)$ og $f(\underline{e}_4)$ ved indsættelse af ② reduceres til en linearkombination af $f(\underline{e}_1)$, $f(\underline{e}_2)$ og $f(\underline{e}_3)$ så slutter vi, at

③ $f(\mathbb{R}^4) = \text{span}\{f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3), f(\underline{e}_4)\} = \text{span}\{f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)\}$.

Af ① og ③ følger så, at $(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3))$ er en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$. Kaldes denne basis u så følger det af ②, at ${}_u\underline{f(\underline{e}_4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Opgave 3.

Systemmatrix $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. $\quad \dot{x}_i(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$, $i = 1,2$.

1. Differentialligningssystemet er da

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) - 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) - 8x_2(t) \end{cases}$$

Opgave 3 fortsat.

2. Af Mapleudskriften følger, at systemmatricen $\underline{\underline{A}}$ har egenværdierne 2 og −3 og at $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \in E_2$ og $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in E_{-3}$ er to lineært uafhængige egenvektorer for systemmatricen $\underline{\underline{A}}$.

Den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet er da

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. $$\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\end{bmatrix} = c_1 e^{2t_0}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{-3t_0}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{2t_0}c_1 + e^{-3t_0}c_2 = k \\ e^{2t_0}c_1 + e^{-3t_0}c_2 = k \end{cases}$$

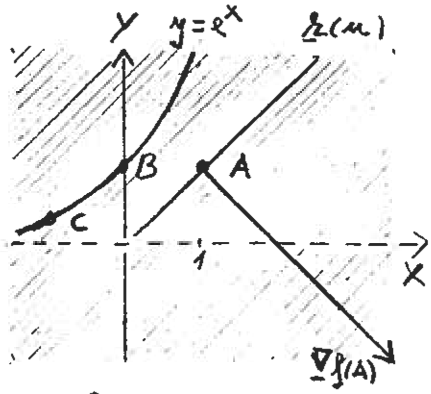
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2t_0}c_1 = 0 \\ e^{2t_0}c_1 + e^{-3t_0}c_2 = k \end{cases} \quad \text{Dvs. } c_1 = 0 \text{ og } c_2 = k e^{3t_0}.$$

Den søgte løsning er da

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = k e^{3t_0} e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} x_1(t) = k e^{3(t_0-t)} \\ x_2(t) = k e^{3(t_0-t)} \end{cases}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dvs. $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er identiske.

Opgave 4.



1. $f(x,y) = \frac{e^x}{y}$ er defineret for $x \in \mathbb{R}$ og $y \neq 0$.
Dvs. $\underline{Dm(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}}$.

2. $f(A) = f(1,1) = \underline{e}$, $f(B) = f(0,1) = \underline{1}$ og
$f(C) = f(-1, \frac{1}{e}) = \underline{1}$.
Da $f(B) = f(C) = 1$, så ligger B og C på samme niveaukurve for f og denne er givet ved:
$f(x,y) = \frac{e^x}{y} = 1 \Leftrightarrow \underline{y = e^x,\ x \in \mathbb{R}}$.

3. $\underline{\nabla} f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \left(\frac{e^x}{y}, -\frac{e^x}{y^2}\right)$.
$\underline{\underline{\nabla} f(1,1) = (e, -e)}$. $\underline{a} = (1,-1)$, $\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Opgave 4 fortsat.

Den søgte retningsafledede er da

$f'(A;\underline{e}) = \underline{e}\cdot\underline{\nabla} f(1,1) = \frac{2e}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}\,e.}$

4. $\underline{r}(u) = (u,u)\,,\quad u>0\,.$

$h(u) = f(\underline{r}(u)) = f(u,u) = \frac{e^u}{u}\,,\quad u>0\,.$

$h'(u) = \frac{u e^u - e^u}{u^2} = 0 \iff u e^u - e^u = 0 \iff u = u_0 = 1.$

Dvs. $h'(u)=0$ netop i kurvepunktet $\underline{r}(1) \underline{= (1,1).}$

$h'(u)$ kunne også findes v.h.a. kædereglen:

$h'(u) = \frac{d f(\underline{r}(u))}{du} = \underline{r}'(u)\cdot\underline{\nabla} f(\underline{r}(u)) = (1,1)\cdot\underline{\nabla} f(u,u) =$

$(1,1)\cdot\left(\frac{e^u}{u}, -\frac{e^u}{u^2}\right) = \frac{e^u}{u} - \frac{e^u}{u^2} = \frac{u e^u - e^u}{u^2}.$