Mat 1. 2-timers prøve 7.12.2009.

Opgave 1.

Givet 4×4 matrix $\underline{\underline{A}}$. Af Mapleudskriften afløses, at

$$\lambda_{\underline{\underline{A}}} = \begin{cases} 4 \text{ (dobbelt)} \\ 0 \text{ (dobbelt)} \end{cases}, \quad E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ og } E_0 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Da $\underline{\underline{A}}$ har fire lineært uafhængige egenvektorer nemlig

$$\underline{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_4, \quad \underline{\underline{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in E_4, \quad \underline{\underline{v}}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_0 \text{ og } \underline{\underline{v}}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in E_0$$

(LA sætning 7.4), så følger det af LA sætning 7.12, at $\underline{\underline{A}}$ kan diagonaliseres ved en similartransformation.

2.

Sættes $\underline{\underline{V}} = [\underline{\underline{v}}_1\ \underline{\underline{v}}_2\ \underline{\underline{v}}_3\ \underline{\underline{v}}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, så er

$\underline{\underline{V}}$ regulær og $\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Lambda}}$ ifølge LA sætning 7.12.

3.

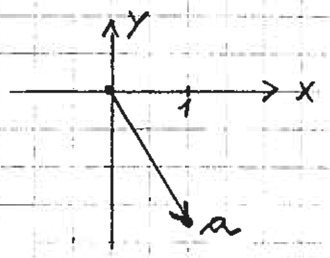
$$\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Lambda}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Det bemærkes, at $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{M}}$ og $\underline{\underline{V}}^{-1} = \underline{\underline{M}}^{-1}$ i Mapleudskriften.)

4. Sættes $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, så er

$$\underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{V}}^{-1} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}^2\underline{\underline{V}}^{-1} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}^{-1} = \underline{\underline{A}}.$$

Opgave 2.



$a = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

1. $|a| = 2$, $\text{Arg}(a) = -\frac{\pi}{3}$. Dvs. $a = 2_{-\frac{\pi}{3}}$.

2. $(*)\quad z^4 = 16_{\frac{2}{3}\pi}.$

$a^4 = \left(2_{-\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4_{-\frac{4\pi}{3}} = 16_{(2\pi - \frac{4\pi}{3})} = 16_{\frac{2\pi}{3}}.$

Dvs. a er en løsning til $(*)$.

Opgave 2 fortsat.

3. Samtlige løsninger til (*) er givet ved:

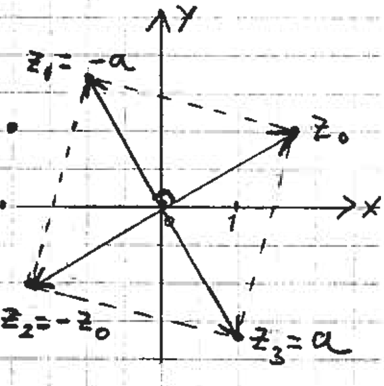
$z_p = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $p=0,1,2,3$. Dvs.

$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \underline{\sqrt{3}+i}$.

$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{-1+\sqrt{3}i} = -a$.

$z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \underline{-\sqrt{3}-i} = -z_0$.

$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{1-\sqrt{3}i} = a$.



Opgave 3.

(*) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + a\,x(t) = 0$, $t\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$.

1. $\lambda^2+a\lambda+a=0$, $D=a^2-4a=a(a-4)=0 \Leftrightarrow \underline{a=\begin{cases}0\\4\end{cases}}$.

2. $\underline{a=2}$: $\lambda^2+2\lambda+2=0$, $D=-4=(\pm 2i)^2$, $\lambda=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$.

Samtlige løsninger til (*) er da ifølge e-note (9.149)

$\underline{x(t)=c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t}$, $t\in\mathbb{R}$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

3. $x(t)=\frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{3})t}+\frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{3})t}$, $t\in\mathbb{R}$ er en partikulær løsning til (*). Af e-note (9.148) følger så, at karakterligningen har rødderne $1\pm\sqrt{3}$. Dvs.

$\lambda^2+a\lambda+a = ((\lambda-1)-\sqrt{3})((\lambda-1)+\sqrt{3}) = (\lambda-1)^2-3 = \lambda^2-2\lambda-2$.

Den givne funktion er en partikulær løsning til (*) netop for $\underline{a=-2}$.

4. (**) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + a\,x(t) = q(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$.

Fuldstændig løsning til (**) ifølge Maple:

$x(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}\sin t + c_1t + c_2$, $t\in\mathbb{R}$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

Heraf følger:

① $x_0(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}\sin t$, $t\in\mathbb{R}$ er en partikulær løsning til (*) $((c_1, c_2)=(0,0))$

Opgave 3.

4. fortsat

② $x_{Hom}(t) = c_1 t + c_2$, $t \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ er samtlige løsninger til (*). Af e-note (9.150) og spm. 1 følger så, at $\underline{a = 0}$.

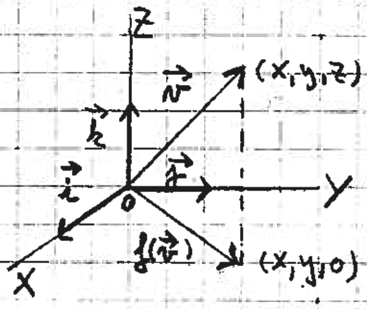
$\underline{a=0}$: (**) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = q(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$x_0(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\sin t$ partikulær løsning til (**) $\Leftrightarrow$

$\underline{q(t)} = x_0''(t) = \underline{e^{-t}\cos t}$.

Opgave 4.

1.



Hvis vektoren $\vec{v}$ har koordinatsættet (x, y, z), så har billedvektoren $f(\vec{v})$ koordinatsættet $(x, y, 0)$.

I det følgende tillader vi os for nemheds skyld at identificere vektorelne med deres koordinatsæt.

2. $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{v} = (x, y, z)$, $k \in \mathbb{R}$.

$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$

$= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$.

Dvs. L1 er opfyldt.

$f(k\vec{v}) = f(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0) = k(x, y, 0) = kf(\vec{v})$.

Dvs. L2 er opfyldt.

Da L1 og L2 er opfyldt er f lineær.

Andeh metode:

$\underline{f(\vec{v})} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Af LA sætning 6.7 følger så, at f er lineær og

$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ er da afbildningsmatricen for f m.h.t. basis $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Opgave 4 fortsat.

3. $\vec{u}_1 = (4,-3,0)$, $\vec{u}_2 = (0,0,7)$.

$f(\vec{u}_1) = f(4,-3,0) = (4,-3,0) = \vec{u}_1$ og

$f(\vec{u}_2) = f(0,0,7) = (0,0,0) = 0(0,0,7) = 0\vec{u}_2$.

Heraf ses, at $\vec{u}_1$ er en egenvektor for f hørende til egenværdien 1 og at $\vec{u}_2$ er en egenvektor for f hørende til egenværdien 0.

4. Ifølge spm. 3 er 1 og 0 egenværdier for f.

$\vec{v} = (x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow f(\vec{v}) = \vec{v} \Leftrightarrow (x,y,0) = (x,y,z) \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow$

$\vec{v} = (x,y,0) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Egenvektorrummet E_1 består da af alle vektorer i (x,y)-planen, hvilket jo også er anskueligt klart. Dermed er $gm(1) = 2 \leq am(1)$

$\vec{v} = (x,y,z) \in E_0 \Leftrightarrow f(\vec{v}) = 0\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

$\Leftrightarrow \vec{v} = (0,0,z) = z\vec{k}$.

Egenvektorrummet E_0 består da af alle vektorer på z-aksen, hvilket jo også er anskueligt klart. Dermed er $gm(0) = 1 \leq am(0)$.

Da f højst har tre egenværdier talt med algebraisk multiplicitet, så slutter vi alt i alt, at

$$\lambda_f = \begin{cases} 1 , & gm(1) = am(1) = 2 \text{ , en basis for } E_1 \text{ feks. } (\vec{i},\vec{j}) . \\ 0 , & gm(0) = am(0) = 1 \text{ , en basis for } E_0 \text{ feks. } \vec{k} . \end{cases}$$

Resultatet fås også direkte v.h.a. afbildningsmatricen

$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ for f m.h.t. $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ fundet i spm. 2.