DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 7. december 2009.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for efterårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver er lige vigtige.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

```
> Eigenvectors(A,output=list);
```

$$\left[\left[4,2,\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right],\left[0,2,\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

```
> M:=<<1,0,0,1>|<0,1,1,0>|<-1,0,0,1>|<0,-1,1,0>>:
> M^(-1);
```

$$\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

Der er givet en 4×4 matrix $\underline{\underline{A}}$ hvis egenværdiproblem er blevet løst med "Eigenvectors"i Maple-sessionen ovenfor.

1. Begrund at $\underline{\underline{A}}$ kan diagonaliseres.
2. Angiv en regulær matrix $\underline{\underline{V}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{\Lambda}}$ således at $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{V}}$.
3. Bestem $\underline{\underline{A}}$.
4. Bestem en 4×4 matrix $\underline{\underline{B}}$ som opfylder $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$.

OPGAVE 2

Der er givet det komplekse tal $a = 1 - i \cdot \sqrt{3}$.

1. Bestem modulus og hovedargument af a, og skriv a på formen r_v.
2. Gør rede for at a er en løsning til den binome ligning

$$(*) \qquad z^4 = 16_{\frac{2}{3}\pi}$$

3. Bestem samtlige løsninger til $(*)$, skriv hver af løsningerne på formen $a + i \cdot b$, og indtegn dem i den komplekse talplan.

OPGAVE 3

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er en homogen 2. ordens lineær differentialligning givet ved

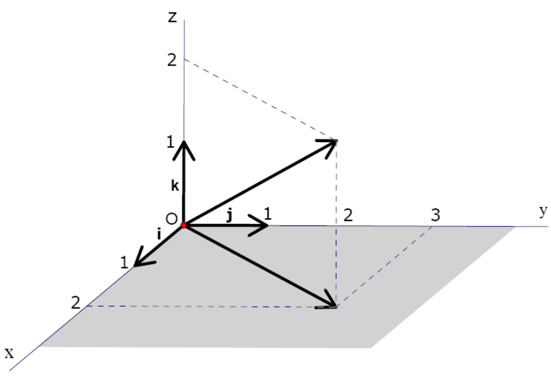
$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + a\,x(t) = 0$$

1. Diskriminanten til den til $(*)$ svarende karakterligning betegnes D. Angiv de værdier af a for hvilke $D = 0$.
2. Bestem for $a = 2$ den fuldstændige løsning til $(*)$.
3. Bestem en værdi af a for hvilken funktionen $x(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(1+\sqrt{3})t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(1-\sqrt{3})t}$ er en partikulær løsning til $(*)$.

En inhomogen 2. ordens lineær differentialligning $(**)$ fremkommer ved at højresiden af $(*)$ erstattes af en kontinuert funktion $q(t) \neq 0$.

4. For et bestemt valg af a og af $q(t)$ har Maples "dsolve" som fuldstændig løsning til $(**)$ angivet $x(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(t) + \_C1\,t + \_C2$. Bestem det valg af a og det valg af $q(t)$ som svarer til denne løsning.

OPGAVE 4



I rummet er der givet et sædvanligt retvinklet $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$-koordinatsystem, og alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. På figuren er vektoren med koordinatsættet $(2,3,2)$ projiceret vinkelret ned i (x,y)-planen i rummet. Lad f være den afbildning som projicerer alle rumvektorer vinkelret ned i (x,y)-planen.

1. Lad $\vec{v}$ være en vilkårlig rumvektor med koordinatsættet (x,y,z). Bestem koordinatsættet for $f(\vec{v})$.
2. Vis at f er lineær.
3. Vektoren $\vec{u_1}$ har koordinatsættet $(4,-3,0)$, og vektoren $\vec{u_2}$ har koordinatsættet $(0,0,7)$. Gør rede for at $\vec{u_1}$ og $\vec{u_2}$ er egenvektorer for f, og bestem de egenværdier som disse to vektorer hører til.
4. Bestem en basis for hvert af de til f hørende egenvektorrum.

- Slut -