DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 17. maj 2016.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x)=\sqrt{2x-1}\,.$$

1. Bestem definitionsmængden $\mathrm{Dm}(f)$ for f.
2. Bestem det approksimerende polynomium $P_3(x)$ af grad 3 for f med udviklingspunktet $x_0=1$.
3. Gør rede for at den til $P_3(x)$ hørende restfunktion $R_3(x)$ kan udtrykkes ved

   $$R_3(x)=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{(2\xi-1)^{7/2}}\cdot(x-1)^4$$

   for et ξ mellem 1 og x. Vis ved vurdering af restfunktionen at den numeriske værdi af den fejl man begår ved at benytte $P_3\left(\frac{3}{2}\right)$ i stedet for $f\left(\frac{3}{2}\right)$ er mindre end eller lig med $\frac{5}{2^7}$.

OPGAVE 2

Der er givet en symmetrisk matrix:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{288}{25} & \frac{84}{25}\\[6pt] \frac{84}{25} & \frac{337}{25}\end{bmatrix}.$$

1. Find i $\mathbb{R}^{2\times2}$ en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ og en diagonalmatrix Λ som opfylder

   $$\Lambda=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{Q}.$$

En ellipse $\mathcal{E}$ er i et sædvanligt retvinklet (x,y)-koordinatsystem i planen givet ved matrix-ligningen

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=144\,.$$

2. Bestem halvakserne for $\mathcal{E}$.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

For en glat funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med $f(0,0)=0$ er et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y)-planen givet ved

$$\mathbf{V}(x,y) = \nabla f(x,y) = (x-y^2+1, -2xy)\,.$$

1. Bestem samtlige stationære punkter for f.

2. Bestem Hessematricen for f, og gør rede for at f har netop ét egentligt lokalt minimum og ingen egentlige lokale maxima.

3. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs en selvvalgt kurve $\mathcal{K}$ fra origo til et vilkårligt punkt (x,y). Vink: Du kan bruge formlen

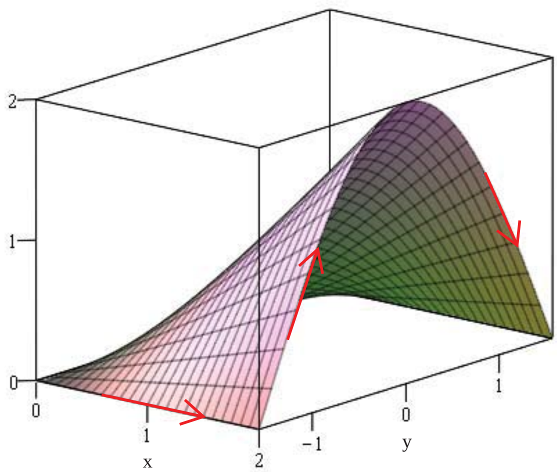
$$(x,y)\cdot\int_0^1 \mathbf{V}(ux,uy)\,\mathrm{d}u\,.$$

   Eller du kan integrere langs den trappelinje i (x,y)-planen der først går fra $(0,0)$ til $(x,0)$ og dernæst fra $(x,0)$ til (x,y).

4. Bestem den værdi som f antager i det i spørgmål 2) omtalte egentlige lokale minimum.

OPGAVE 4

I (x,y)-planen i (x,y,z)-rummet er der givet punktmængden $A = \left\{\,(x,y)\,|\,0\le x\le 2 \text{ og } -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\,\right\}$ og funktionen $h(x,y) = x\cos(y)$. Lad $\mathcal{F}$ betegne den del af grafen for h som ligger lodret over A, se figuren.



1. Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v)$ for $\mathcal{F}$, og bestem den til $\mathbf{r}(u,v)$ hørende normalvektor $\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{r}'_u(u,v)\times\mathbf{r}'_v(u,v)$.

Om et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y,z)-rummet oplyses at $\mathrm{Div}(\mathbf{V})(x,y,z) = x+y+z$ og $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x,y,z) = (3z,3x,3y)$.

2. Bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs den lukkede randkurve $\partial\mathcal{F}$ for $\mathcal{F}$ med den på figuren viste orientering af $\partial\mathcal{F}$.

3. Lad Ω betegne det massive rumlige område der ligger lodret mellem A og $\mathcal{F}$. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem den lukkede overflade $\partial\Omega$ af Ω.

`Opgavesættet er slut.`