 Mat 1. 2-timers prøve 18.5.2015.

Opgave 1.

$f(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

1. $\nabla f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = (2xy, x^2+y^2-1) = (0,0) \Leftrightarrow$
$x=0$ og $y=\pm 1$ eller $y=0$ og $x=\pm 1$.
De stationære punkter for f er da $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ og $(0,-1)$.

2. Hvis f har egentligt lokalt maksimum eller egentligt lokalt minimum i et punkt, så må punktet være et stationært punkt, da f ikke har undtagelsespunkter.
Hesse-matricen for f i punktet (x,y) er

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{H}}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \lambda = \begin{cases} 2 > 0 \\ -2 < 0 \end{cases}. \quad \underline{\underline{H}}(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \lambda = \begin{cases} 2 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases}.$$

f har hverken egentligt lokalt maksimum eller egentligt lokalt minimum i det stationære punkt $(1,0)$.
f har egentligt lokalt minimum i det stationære punkt $(0,1)$ med værdien $f(0,1) = -\frac{2}{3}$.
f har hverken egentligt lokalt maksimum eller egentligt lokalt minimum i $(0,0)$, da $(0,0)$ ikke er et stationært punkt.

3. $\nabla f(0,0) = (0,-1)$. $\underline{e}$ en enhedsvektor ud fra $(0,0)$.
$f'((0,0);\underline{e}) = \nabla f(0,0) \cdot \underline{e} = 0 \Leftrightarrow \underline{e} \perp \nabla f(0,0) \Leftrightarrow$
$\underline{e} = (1,0)$ eller $\underline{e} = (-1,0)$.
X-aksens positive retning og X-aksens negative retning er netop de retninger fra $(0,0)$,

2. Mat 1. 2-timers prøve 18.5. 2015.

Opgave 1 fortsat.

hvori den retningsafledede af f i $(0,0)$ antager værdien 0.

Opgave 2.

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^T$. $\underline{v}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ er en egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ hørende til egenværdien 2 og $\underline{v}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ er en egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ hørende til egenværdien 0.

1. Da $\underline{v}_1$ er en enhedsvektor og da $\underline{v}_2 = \widehat{\underline{v}_1}$, så er egenvektorerne $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ en ortonormal basis for $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

2. $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}\,xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2 \iff$

$$[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2.$$

$(O; \underline{v}_1, \underline{v}_2)$ er et nyt sædvanligt retvinklet koordinat= system i planen fremkommet ved en drejning af det givne koordinatsystem $60°$ om O.

$\underline{\underline{Q}} = [\underline{v}_1\ \underline{v}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ er positiv ortogonal og

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

((x,y) er gamle koordinater og (x_1,y_1) er nye koor= dinater for et punkt i planen.)

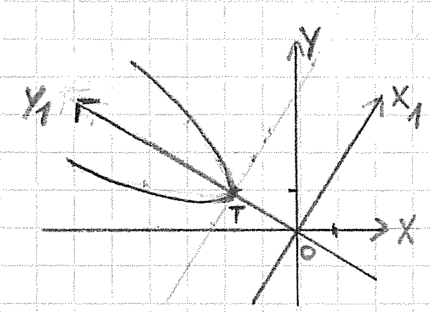
Parablens ligning i det nye koordinatsystem er

$$[x_1\ y_1]\,\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Q}}}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = -2 \iff$$

$$2x_1^2 - y_1 = -2 \iff y_1 - 2 = 2x_1^2.$$

Opgave 2 fortsat.

Dvs en parabel med toppunkt $T(x_1, y_1) = (0, 2)$, hvilket er punktet $T(x, y) = (-\sqrt{3}, 1)$ i det givne koordinatsystem.



Symmetriaksen er Y_1-aksen, som er linien med ligningen $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ i det givne koordinatsystem.

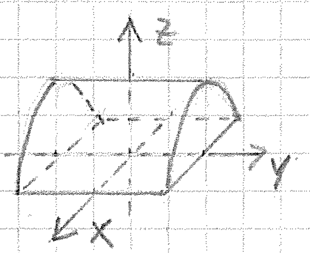
Opgave 3.

$h(x,y) = 1 - x^2$. Grafflade F givet ved

$F = \{(x,y,z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = h(x,y)\}$.

1. Parameterfremstilling for F.

$\underline{r}(u,v) = (u, v, 1-u^2)$, $u \in [-1;1]$, $v \in [-1;1]$.



$\underline{r}'_u(u,v) = (1, 0, -2u)$.

$\underline{r}'_v(u,v) = (0, 1, 0)$.

$\underline{N}(u,v) = \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = (2u, 0, 1)$ har netop positiv z-koordinat.

$\underline{V}(x,y,z) = (x^2, z - 2xy, 4z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. $\underline{V}(\underline{r}(u,v)) = (u^2, 1-u^2-2uv, 4-4u^2)$.

$\underline{V}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{N}(u,v) = 2u^3 - 4u^2 + 4$.

$$\text{Flux}(\underline{V}, F_r) = \int_{F_r} \underline{V} \cdot \underline{n}_{F_r} \, d\mu = \int_{v=-1}^{1} \left(\int_{u=-1}^{1} \underline{V}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{N}(u,v) \, du \right) dv$$

$$= \int_{v=-1}^{1} \left(\int_{u=-1}^{1} (2u^3 - 4u^2 + 4) \, du \right) dv = \int_{v=-1}^{1} \left[\frac{u^4}{2} - \frac{4u^3}{3} + 4u \right]_{u=-1}^{1} dv = \int_{v=-1}^{1} \frac{16}{3} \, dv$$

$$= \underline{\underline{\frac{32}{3}}}.$$

Massivt område Ω i rummet givet ved

$\Omega = \{(x,y,z) \mid x \in [-1;1], y \in [-1;1], z \in [0; 1-x^2]\}$.

Opgave 3 fortsat.

3. Parameterfremstilling for Ω.

$\underline{s}(u,v,w) = (u, v, w(1-u^2))$, $u \in [-1;1]$, $v \in [-1,1]$, $w \in [0;1]$.

($\underline{s}(u,v,w)$ er liniestykket fra $(u,v,0)$ til $(u,v,1-u^2)$)

$$J_{\underline{s}}(u,v,w) = \left| \underline{\underline{s}}'_u \; \underline{\underline{s}}'_v \; \underline{\underline{s}}'_w \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2uw & 0 & 1-u^2 \end{vmatrix} = 1-u^2.$$

$\text{Jacobi}_{\underline{s}}(u,v,w) = |J_{\underline{s}}(u,v,w)| = |1-u^2| = 1-u^2$, da $u \in [-1;1]$.

$$\underline{\text{Vol}(\Omega)} = \int_{\Omega_{\underline{s}}} 1 \, d\mu = \int_{w=0}^{1} \left(\int_{v=-1}^{1} \left(\int_{u=-1}^{1} \text{Jacobi}_{\underline{s}}(u,v,w) \, du \right) dv \right) dw$$

$$= \int_{w=0}^{1} \left(\int_{v=-1}^{1} \left(\int_{u=-1}^{1} (1-u^2) \, du \right) dv \right) dw = \int_{w=0}^{1} \left(\int_{v=-1}^{1} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{u=-1}^{1} dv \right) dw$$

$$= \int_{w=0}^{1} \left(\int_{v=-1}^{1} \frac{4}{3} \, dv \right) dw = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

4. $\text{div} \, \underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 2x - 2x + 4 = 4$.

$\partial\Omega$ er den lukkede overflade af Ω orienteret med udadrettet enhedsnormalvektor.

Af Gauss' sætning fås da

$$\underline{\text{Flux}(\underline{V}, \partial\Omega)} = \int_{\Omega_{\underline{s}}} \text{div} \, \underline{V} \, d\mu = \int_{\Omega_{\underline{s}}} 4 \, d\mu = 4 \, \text{Vol}(\Omega) = \frac{32}{3}.$$

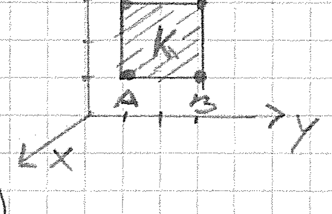
Opgave 4.

$A(0,1,1)$, $B(0,3,1)$, $C(0,3,3)$, $D(0,1,3)$.

$\underline{U}(x,y,z) = (2xy, -z^2, x^2)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z) = x^2 y - \frac{1}{3} z^3$, $\underline{V}(x,y,z) = \underline{\nabla} f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. $$\underline{\text{rot}}(\underline{U}) = \underline{\nabla} \times \underline{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & -z^2 & x^2 \end{vmatrix} = (2z, -2x, -2x).$$



Parameterfremstilling for K.

$\underline{r}(u,v) = (0,u,v)$, $u \in [1;3]$, $v \in [1;3]$.

$\underline{r}'_u(u,v) = (0,1,0)$.

$\underline{r}'_v(u,v) = (0,0,1)$. $\underline{N}(u,v) = \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = (1,0,0)$.

Opgave 4 fortsat.

$\underline{\text{rot}}(\underline{U})(\underline{r}(u,v)) = (2v, 0, 0)$

$\underline{\text{rot}}(\underline{U})(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{N}(u,v) = 2v.$

$\underline{\text{Flux}(\underline{\text{rot}}(\underline{U}), K_r)} = \int_{K_r} \underline{\text{rot}}(\underline{U}) \cdot \underline{n}_{K_r} = \int_{u=1}^{3} \left(\int_{v=1}^{3} 2v \, dv \right) du$

$= \int_{u=1}^{3} \left[v^2 \right]_{v=1}^{3} du = \underline{16}.$

2\.

$l_{AD}: \underline{s}(t) = (0,1,1) + t(0,0,2) = (0, 1, 1+2t), \ t \in [0;1].$

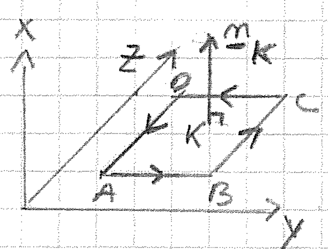
$\underline{s}'(t) = (0,0,2), \quad \underline{U}(\underline{s}(t)) = (0, -(1+2t)^2, 0)$

$\underline{\text{Tan}(\underline{U}, l_r)} = \int_{l_r} \underline{U} \cdot \underline{t}_r \, d\mu = \int_0^1 \underline{U}(\underline{s}(t)) \cdot \underline{s}'(t) \, dt = \int_0^1 0 \, dt = \underline{0}.$

Da $\underline{V}(x,y,z) = \underline{\nabla} f(x,y,z)$ er

$\underline{\text{Tan}(\underline{V}, l_r)} = f(D) - f(A) = -9 + \frac{1}{3} = \underline{-\frac{26}{3}}.$

3\.



$\underline{\text{Cirk}(\underline{V}, \partial K) = 0}$, da $\underline{V}$ er et gradientfelt.

Med den valgte orientering af randkurven ∂K for K er

$\underline{n}_K = (1,0,0) = \underline{N}(u,v)$ (højrekonvention).

Af Stokes' sætning fås da

$\underline{\text{Cirk}(\underline{U}, \partial K)} = \text{Flux}(\underline{\text{rot}}(\underline{U}), K_r) \underset{1.}{=} \underline{16}.$