DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig 2-timersprøve i forårspensum den 18. maj 2015.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En glat funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y)=x^2y+\frac{1}{3}y^3-y\,.$$

1. Find alle stationære punkter for f.
2. Undersøg for hvert af punkterne $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ om f har egentligt lokal maksimum, egentligt lokal minimum eller ingen af delene i punktet.
3. Bestem samtlige retninger fra $(0,0)$ hvori den retningsafledede af f i $(0,0)$ antager værdien 0.

OPGAVE 2

Det oplyses at matricen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

har egenvektoren $\mathbf{v}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hørende til egenværdien 2 og egenvektoren $\mathbf{v}_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ hørende til egenværdien 0.

1. Gør rede for at vektorsættet $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$.

En parabel er i et sædvanligt retvinklet (x,y)-koordinatsystem i planen givet ved ligningen

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}\,xy+\frac{3}{2}y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=-2\,.$$

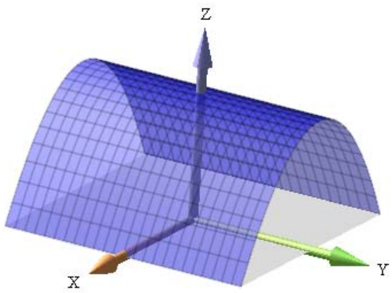
2. Bestem parablens toppunkt og symmetriakse.

OPGAVE 3

Funktionen $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ er givet ved $h(x,y)=1-x^2$. Vi betragter graffladen F givet ved

$$F=\{\,(x,y,z)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ z=h(x,y)\,\}\,.$$

Opgavesættet fortsætter ⟶



1. Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{r}(u,v)$ for F som opfylder at normalvektoren $\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)$ har positiv z-koordinat.

Et vektorfelt $\mathbf{V}$ er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (x^2,\, z-2xy,\, 4z)$.

2. Bestem fluxen $\displaystyle\int_{F_\mathbf{r}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{F_\mathbf{r}}\, \mathrm{d}\mu$.

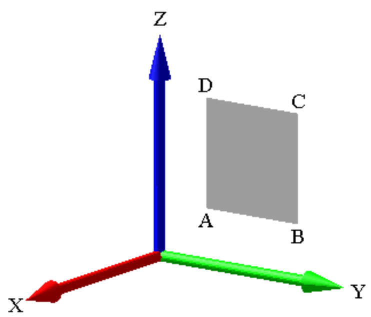
Lad Ω betegne det massive rumlige område der ligger lodret mellem (x,y)-planen og F.

3. Bestem rumfanget af Ω.

4. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.

OPGAVE 4

I (x,y,z)-rummet er der givet punkterne $A(0,1,1)$, $B(0,3,1)$, $C(0,3,3)$ og $D(0,1,3)$.



Det plane kvadrat som udspændes af de fire punkter, betegnes K. Vi betragter endvidere vektorfeltet $\mathbf{U}$ givet ved $\mathbf{U}(x,y,z) = (2xy, -z^2, x^2)$ og vektorfeltet $\mathbf{V}$ som er gradienten af funktionen $f(x,y,z) = x^2y - \dfrac{z^3}{3}$.

1. Bestem fluxen af $\mathbf{rot}(\mathbf{U})$ gennem K, idet K parametriseres ved

$$\mathbf{r}(u,v) = (0,u,v) \text{ med } u \in [1,3] \text{ og } v \in [1,3]\,.$$

2. Bestem det tangentielle kurveintegral af såvel $\mathbf{U}$ som $\mathbf{V}$ langs det rette linjestykke fra A til D.

3. Bestem cirkulationen af såvel $\mathbf{U}$ som $\mathbf{V}$ langs randen af K hvis orientering fastlægges ved punktrækkefølgen $ABCDA$.

`Opgavesættet er slut.`