DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 17. maj 2014.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2\cos(x) - \sin(2x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Bestem ved hjælp af elementære sætninger for differentiation de afledede

$$f'(x), f''(x) \text{ og } f'''(x)\,.$$

Lad $P_2(x)$ betegne det approksimerende andengradspolynomium for f med udviklingspunktet $x_o = 0$, og lad $R_2(x)$ betegne den hertil hørende restfunktion givet ved

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{ for et } \xi \text{ mellem } 0 \text{ og } x\,.$$

2. Benyt resultater fra spørgsmål 1 til at opstille $P_2(x)$.
3. Vis ved vurdering af $R_2(x)$ at den fejl man begår ved at benytte $P_2(\frac{1}{10})$ i stedet for $f(\frac{1}{10})$ er mindre end eller lig med $\frac{1}{600}$.

OPGAVE 2

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - y\sin(x)\,.$$

Endvidere betragtes den åbne punktmængde

$$M = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x < 3 \,\right\}.$$

1. Bestem de partielle afledede af første og anden orden for f.
2. Det oplyses at f har tre stationære punkter som tilhører M. Bestem disse tre stationære punkter.
3. Find samtlige punkter i M hvori f har lokalt minimum, og samtlige punkter i M hvori f har lokalt maksimum .

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

I (x,y,z)-rummet er en rumkurve $\mathcal{K}_\mathbf{r}$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, 1-2t), \ t \in [0,1].$$

1. Vis at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$, og bestem længden af $\mathcal{K}_\mathbf{r}$.

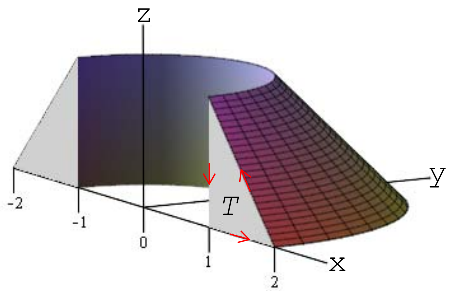
Et førsteordens vektorfelt $\mathbf{V}$ er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (y,x,-2)$.

2. Bestem (med alle mellemregninger) det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}_\mathbf{r}$.
3. Vis at $\mathcal{K}_\mathbf{r}$ er den flowkurve for $\mathbf{V}$ som starter i punktet $(0,2,1)$ til tiden $t=0$.

OPGAVE 4

Et massivt område Ω i (x,y,z)-rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = (u\cos(w), u\sin(w), v(2-u)) \text{ hvor } u \in [1,2], \ v \in [0,1], \ w \in [0,\pi].$$



1. To funktioner $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er givet ved henholdsvis $f(x,y,z) = 1$ og $g(x,y,z) = \frac{y}{2}$. Bestem (med alle mellemregninger) rumintegralerne

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \text{ og } \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

Betragt vektorfeltet $\mathbf{V}$ givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (\frac{1}{2}z^2, \frac{1}{4}y^2, -2y)$.

2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.
3. Angiv et vektorfelt $\mathbf{U}$ hvis divergens er konstant, og som opfylder

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \,\mathrm{d}\mu = 2\pi.$$

Ω er fremkommet ved at et plant trekant-område T beliggende i (x,z)-planen er drejet vinklen π omkring z-aksen i positiv omløbsretning.

4. Angiv en parameterfremstilling for T, og bestem cirkulationen af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂T af T med den på figuren viste omløbsretning.

`Opgavesættet er slut.`