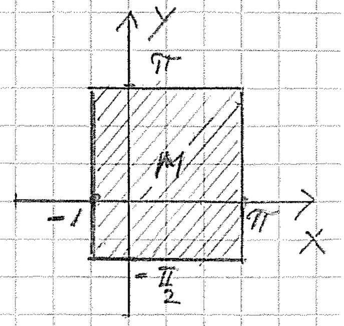
## Opgave 1.

$f(x,y) = x\cos y$ , $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq \pi$ og $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi\}$.




1. $\underline{\nabla} f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \underline{(\cos y, -x\sin y)}$.

$\underline{\nabla} f(0,0) = (f'_x(0,0), f'_y(0,0)) = \underline{(1,0)}$.

2. $\underline{\nabla} f(x,y) = (\cos y, -x\sin y) = (0,0)$ og

$(x,y)$ et indre punkt af $M$, dvs.

$-1 < x < \pi$ og $-\frac{\pi}{2} < y < \pi \iff (x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$,

$\underline{(0,\frac{\pi}{2})}$ er således <u>eneste stationære punkt i det indre af M</u>,

3. Da $M$ er <u>begrænset</u> og <u>afsluttet</u> og da $f$ er <u>kontinuert</u> i $M$, så har $f$ et globalt maksimum og et globalt minimum i $M$. Da $f$ ikke har undtagelsespunkter i det indre af $M$, så antages disse værdier enten i et indre stationært punkt af $M$ eller på randen af $M$.

<u>$(0,\frac{\pi}{2})$ eneste stationære punkt i det indre af M</u> (spm. 2.)

og $f(0,\frac{\pi}{2}) = 0$.

<u>Randundersøgelse:</u>

$x = \pi$, $y \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$. $g_1(y) = f(\pi,y) = \pi\cos y$ , $y \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$.

$g_1'(y) = -\pi\sin y = 0$ og $y \in ]-\frac{\pi}{2};\pi[ \iff y = 0$.

$g_1(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $g_1(0) = \pi$, $g_1(\pi) = -\pi$.

$y = \pi$, $x \in [-1;\pi]$, $g_2(x) = f(x,\pi) = -x$ , $x \in [-1;\pi]$.

$g_2'(x) = -1 < 0$, $g_2(-1) = 1$, $g_2(\pi) = -\pi$,

$x = -1$, $y \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$. $g_3(y) = f(-1,y) = -\cos y$, $y \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$.

$g_3'(y) = \sin y = 0$ og $y \in ]-\frac{\pi}{2};\pi[ \iff y = 0$.

$g_3(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $g_3(0) = -1$, $g_3(\pi) = 1$.

$y = -\frac{\pi}{2}$, $x \in [-1;\pi]$. $g_4(x) = f(x,-\frac{\pi}{2}) = 0$ for alle $x \in [-1;\pi]$.

## Opgave 1 fortsat.

Ved numerisk sammenligning af disse undersøgelser fås, at $\underline{\pi} = f(\pi, 0)$ <u>er det globale maksimum for $f$ på $M$</u> og at $\underline{-\pi} = f(\pi,\pi)$ <u>er det globale minimum for $f$ på $M$</u>.

## Opgave 2.

$$f(x,y,z) = 2xy - z^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

1. $$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^T$$

2. $$P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 1 & \text{(enkelt)} \\ -1 & \text{(dobbelt)} \end{cases}.$$

Da $\underline{\underline{A}}$ er symmetrisk, er de to egenvektorrum $E_1$ og $E_{-1}$ ortogonale.

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad E_1 = \text{span}\{(1,1,0)\}.$$

$q_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ er en ortonormal basis for $E_1$.

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad E_{-1} = \text{span}\{(-1,1,0), (0,0,1)\}.$$

$q_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ og $q_3 = q_1 \times q_2 = (0,0,1)$ er en ortonormal basis for $E_{-1}$.

Egenvektorerne $(q_1, q_2, q_3)$ er da en sædvanligt orienteret ortonormal basis for $(\mathbb{R}^3, \circ)$.

3. $$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \underline{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ er positiv ortogonal og

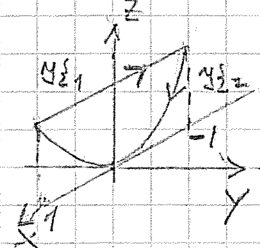
$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

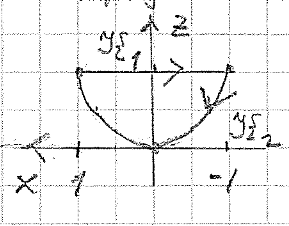
## Opgave 2 fortsat.

Ved anvendelse af den ortogonale substitution $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$

fås $f(x,y,z) = \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = [\tilde{x}\,\tilde{y}\,\tilde{z}]\, \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \underline{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2}$.

## Opgave 3.




$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.

$\mathcal{K}_1$ er givet ved parameterfremstillingen

$\underline{r}_1(u) = (-u, 0, 1)$, $u \in [-1;1]$. Orienteret efter voksende værdier af $u$.

$\mathcal{K}_2$ er givet som $\{(x,y,z) \mid x \in [-1;1],\ y = 0 \text{ og } z = x^2\}$.

1. En parameterfremstilling for $\mathcal{K}_2$ er

$\underline{\underline{r}_2(v) = (v, 0, v^2),\ v \in [-1;1]}$, hvor den viste orientering svarer til voksende værdier af $v$.

$\underline{U}(x,y,z) = (x^2, xyz, x)$ og $\underline{V} = \underline{Rot}(\underline{U})$.

2. $\underline{r}_1'(u) = (-1, 0, 0)$

$\underline{U}(\underline{r}_1(u)) = (u^2, 0, -u)$

$\underline{\text{Tan}(\underline{U}, \mathcal{K}_1)} = \int_{\mathcal{K}_1} \underline{U} \cdot \underline{t}_1\, d\mu = \int_{-1}^{1} \underline{U}(\underline{r}_1(u)) \cdot \underline{r}_1'(u)\, du = \int_{-1}^{1} -u^2\, du$

$= \left[-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \underline{-\frac{2}{3}}.$

$\underline{r}_2'(v) = (1, 0, 2v)$

$\underline{U}(\underline{r}_2(v)) = (v^2, 0, v)$

$\underline{\text{Tan}(\underline{U}, \mathcal{K}_2)} = \int_{\mathcal{K}_2} \underline{U} \cdot \underline{t}_2\, d\mu = \int_{-1}^{1} \underline{U}(\underline{r}_2(v)) \cdot \underline{r}_2'(v)\, dv = \int_{-1}^{1} 3v^2\, dv$

$= [v^3]_{-1}^{1} = \underline{2}.$

3. $\mathcal{F}$ er fladen i $(x,z)$-planen afgrænset af $\mathcal{K}$.

## Opgave 3 fortsat.

Med den viste orientering af randkurven $\mathcal{K} = \partial\mathcal{F}$ for $\mathcal{F}$ er $\underline{n}_{\mathcal{F}} = \underline{n} = (0, -1, 0)$ (Højrekonvention).

Af Stokes' sætning fås da

$$\underline{\text{Flux}(\underline{V}, \mathcal{F})} = \int_{\mathcal{F}} \underline{V} \cdot \underline{n}_{\mathcal{F}} \, d\mu = \int_{\mathcal{F}} \underline{\text{Rot}}(\underline{U}) \cdot \underline{n}_{\mathcal{F}} \, d\mu =$$

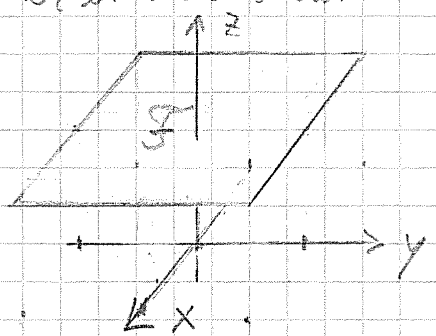
$$\text{Flux}(\underline{\text{Rot}}(\underline{U}), \mathcal{F}) = \text{Cirk}(\underline{U}, \mathcal{K}) \underset{2.}{=} -\frac{2}{3} + 2 = \underline{\frac{4}{3}}.$$

## Opgave 4.

$\mathcal{F}: \underline{r}(u, v) = (u, v, 1)$, $-1 \leq u \leq 1$ og $-1 \leq v \leq 1$.

$\underline{V}(x, y, z) = (x, 1, 2)$.

$\mathcal{F}$ er et kvadrat




1. $\underline{r}'_u(u, v) = (1, 0, 0)$

$\underline{r}'_v(u, v) = (0, 1, 0)$

$\underline{\underline{N}(u, v) = \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = (0, 0, 1)}$

2. $\underline{V}(\underline{r}(u, v)) = (u, 1, 2)$

$$\underline{\text{Flux}(\underline{V}, \mathcal{F})} = \int_{\mathcal{F}} \underline{V} \cdot \underline{n}_{\mathcal{F}} \, d\mu = \int_{v=-1}^{1} \int_{u=-1}^{1} \underline{V}(\underline{r}(u, v)) \cdot \underline{N}(u, v) \, du \, dv$$

$$= \int_{v=-1}^{1} \left( \int_{u=-1}^{1} 2 \, du \right) dv = \underline{8.}$$

$\Omega_1: \underline{s}(u, v, w) = (ue^w, v + w, 1 + 2w)$,

$u \in [-1; 1]$, $v \in [-1; 1]$ og $w \in [0; 1]$.

3. $$J_{\underline{s}}(u, v, w) = \left| \underline{\underline{s}}'_u \; \underline{\underline{s}}'_v \; \underline{\underline{s}}'_w \right| = \begin{vmatrix} e^w & 0 & ue^w \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^w.$$

$$\underline{\text{Jacobi}_{\underline{s}}(u, v, w)} = |J_{\underline{s}}(u, v, w)| = \underline{2e^w}.$$

$$\underline{\text{Vol}(\Omega_1)} = \int_{\Omega_1} 1 \, d\mu = \int_{w=0}^{1} \int_{v=-1}^{1} \int_{u=-1}^{1} \text{Jacobi}_{\underline{s}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw$$

$$= \int_{w=0}^{1} \left( \int_{v=-1}^{1} \left( \int_{u=-1}^{1} 2e^w \, du \right) dv \right) dw = \underline{8e^1 - 8}.$$

Opgave 4 fortsat.

4. $f(t) = \mathrm{Vol}(\Omega_t) = 8e^t - 8$, $f'(t) = 8e^t$ og $\underline{f'(0) = 8.}$

Flowkurverne for $\underline{V}$ gennem punkterne af $\mathcal{F}$ er givet ved parameterfremstillingen

$\underline{s}(u, v, t) = (ue^t, v+t, 1+2t)$, $u \in [-1;1]$, $v \in [-1;1]$.

Det rumlige område, der fejes igennem når $\mathcal{F}$ flyder tiden $t$ med flowkurverne gennem punkterne af $\mathcal{F}$ er netop $\Omega_t$ givet ved

$\underline{s}(u, v, w) = (ue^w, v+w, 1+2w)$,

$u \in [-1;1]$, $v \in [-1;1]$ og $w \in [0;t]$.

Da $J_{\underline{s}}(u, v, w)$ er positiv overalt, så angiver $f'(0)$ volumenekspansionsraten langs $\mathcal{F}$ til tiden $t = 0$ og denne er netop identisk med fluxen af $\underline{V}$ gennem $\mathcal{F}$ (jævnfør sætning 26.6).