DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

**Skriftlig prøve den** 23. maj 2013.

**Kursus Navn:** Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005

**Tilladte hjælpemidler:** Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

**Vægtning:** Opgave 1: **25%**, opgave 2: **25%**, opgave 3: **25%** og opgave 4: **25%**.

## OPGAVE 1

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = x\cos(y)\,.$$

Endvidere er en punktmængde $M$ givet ved

$$M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le \pi \ \text{ og } \ -\frac{\pi}{2} \le y \le \pi\}\,.$$

1. Bestem gradienten for $f$ i ethvert punkt $(x,y)$, og angiv specielt gradientens koordinater i punktet $(0,0)$.
2. Bestem samtlige stationære punkter for $f$ i det indre af $M$.
3. Bestem det globale maksimum og det globale minimun for $f$ på $M$.

## OPGAVE 2

Lad $(x,y,z)$ betegne koordinaterne for en vilkårlig vektor i $(\mathbb{R}^3,\cdot)$. Et andengradspolynomium $f$ er givet ved forskriften

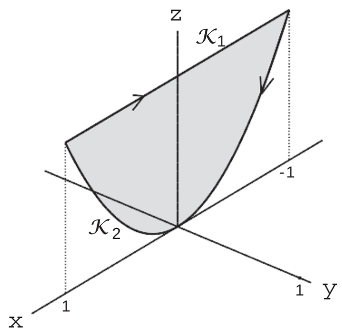
$$f(x,y,z) = 2xy - z^2\,.$$

1. Bestem en symmetrisk matrix $\mathbf{A}$ som opfylder
$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$
2. Bestem en sædvanligt orienteret ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for matricen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Lad $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ betegne koordinaterne for en vektor med hensyn til den nye basis der er angivet som svar på spørgsmål 2. Angiv den reducerede form som forskriften for $f$ antager i $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$-koordinater.

Opgavesættet fortsætter, vend $\longrightarrow$

## OPGAVE 3

Vi betragter en lukket, orienteret rumkurve $\mathcal{K}$ som ligger i $(x,z)$-planen. $\mathcal{K}$ består af to dele, $\mathcal{K}_1$ og $\mathcal{K}_2$, se figuren.




$\mathcal{K}_1$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = (-u, 0, 1)\,,\; u \in [-1\,,\,1]\,.$$

$\mathcal{K}_2$ er givet som punktmængden

$$\left\{(x,y,z)\,|\,x \in [-1\,,\,1]\,, y = 0 \text{ og } z = x^2\right\}\,.$$

$\mathcal{K}$ er orienteret som vist på figuren.

1. Angiv en parameterfremstilling for $\mathcal{K}_2$.

To vektorfelter, $\mathbf{U}$ og $\mathbf{V}$, er givet ved $\mathbf{U}(x,y,z) = (x^2, xyz, x)$ og $\mathbf{V} = \mathbf{Rot}(\mathbf{U})$.

2. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{U}$ langs $\mathcal{K}_1$ og langs $\mathcal{K}_2$.

3. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ gennem den flade i $(x,z)$-planen som afgrænses af $\mathcal{K}$ idet fladens orientering er bestemt ved enhedsnormalvektoren $\mathbf{n} = (0,-1,0)$.

## OPGAVE 4

I $(x,y,z)$-rummet er en parametriseret flade $\mathcal{F}$ givet ved

$$\mathbf{r}(u,v) = (u,v,1) \text{ for } -1 \le u \le 1 \text{ og } -1 \le v \le 1\,.$$

Endvidere betragtes vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (x,1,2)$.

1. Skitser $\mathcal{F}$, og bestem $\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)$.

2. Udregn fluxen af $\mathbf{V}$ gennem $\mathcal{F}$.

Et massivt rumligt område $\Omega_t$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{s}(u,v,w) = (u\mathrm{e}^w, v+w, 1+2w)\,,\; u \in [-1,1]\,,\; v \in [-1,1] \text{ og } w \in [0,t]\,.$$

3. Bestem Jacobifunktionen for $\mathbf{s}$, og udregn volumen af $\Omega_t$.

4. Lad $f(t)$ betegne volumen af $\Omega_t$ som funktion af $t$. Bestem $f'(0)$, og begrund at

$$f'(0) = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\mu\,.$$

- Slut -