DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 10. maj 2012.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.
Vægtning: Opgave 1: **25%**, opgave 2: **20%**, opgave 3: **25%** og opgave 4: **30%**.

OPGAVE 1

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}\,.$$

1. Bestem de partielle afledede af første og anden orden for f, og bestem deres værdier i punktet $(x_0, y_0) = (0,0)$.
2. Opstil ved hjælp af resultaterne i spørgsmål 1 det approksimerende andengradspolynomium for f med udviklingspunktet $(x_0, y_0) = (0,0)$.
3. Vis at alle approksimerende andengradspolynomier for f som har udviklingspunkt på linjen $y = x$, er ens.

OPGAVE 2

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Om den symmetriske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

oplyses at den har to egenværdier $\lambda_1 = a+1$ og $\lambda_2 = a-1$. Endvidere oplyses at vektorerne $(1,1)$ og $(-1,1)$ for ethvert a er egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til henholdsvis λ_1 og λ_2.

1. Bestem en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ og en positiv ortogonal (også kaldet *egentlig* ortogonal) matrix $\mathbf{Q}$ således at
$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,.$$

En andengradsligning i to variable er givet ved

$$(\star) \qquad ax^2 + ay^2 + 2x \cdot y = 1\,.$$

2. For hvilke a beskriver $(\star)$ en hyperbel?
3. For hvilke a beskriver $(\star)$ en ellipse?

Opgavesættet fortsætter, vend $\longrightarrow$

OPGAVE 3

En reel funktion af to reelle variable er givet ved

$$h(x,y) = 1 - x\,.$$

Lad G betegne den del af grafen for h som ligger (lodret) over punktmængden B i (x,y)-planen givet ved

$$B = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1 \text{ og } 1 \le y \le 2\}\,.$$

1. Find en parameterfremstilling for G. Udregn (med alle mellemregninger) den hertil hørende Jacobi-funktion.

En funktion f i rummet er givet ved $f(x,y,z) = \dfrac{x+z}{y}$.

2. Gør rede for at G tilhører definitionsmængden for f.

3. Bestem $\displaystyle\int_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}\mu$.

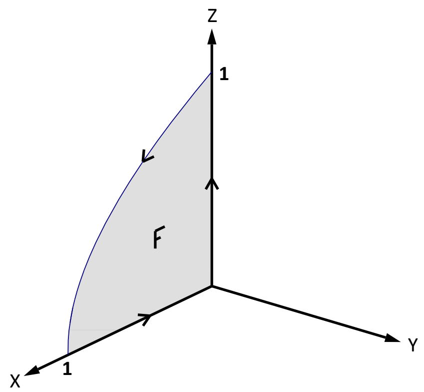
OPGAVE 4

Et vektorfelt $\mathbf{V}$ i (x,y,z)-rummet er givet ved $\mathbf{V}(x,y,z) = (z^2, 5y, -2x)$.

1. Bestem divergensen af $\mathbf{V}$ og rotationen af $\mathbf{V}$.

I (x,z)-planen i rummet betragtes en plan flade F givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} v(1-u^2) \\ 0 \\ u \end{bmatrix},\ u \in [0,1]\ ,\ v \in [0,1]\,.$$



2. Bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂F for F, idet ∂F orienteres som vist på figuren.

Et massivt rumligt område Ω er det omdrejningslegeme der gennemløbes når F drejes vinklen 2π omkring z-aksen.

3. Opstil en parameterfremstilling for Ω, og bestem den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion.

4. Udregn (med alle mellemregninger) rumfanget af Ω.

5. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen af Ω.

- Slut -