Mat 1. 2-timers prøve 16.5. 2011.

Opgave 1.

1. $P_2(x)$ med $x_0=1$ er ifølge Mapleudskriften

$$\underline{P_2(x)} = f(1)+f'(1)(x-1)+\tfrac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 2-2x+(x-1)^2$$
$$= \underline{-2(x-1)+(x-1)^2}.$$

Heraf aflæses også, at

$\underline{f(1)=0}$, $\underline{f'(1)=-2}$ og $\frac{1}{2}f''(1)=1 \Leftrightarrow \underline{f''(1)=2}$.

2. $\underline{P_2(1.1)=-0,19}$. Ifølge Mapleudskriften er $f'''(x)=-\frac{4}{x^3}$.
Af Taylors formel med $x_0=1$ fås, at

$$f(1.1)=P_2(1.1)+\tfrac{1}{3!}f'''(\xi)(1.1-1)^3 = P_2(1.1)-\frac{4}{6\xi^3}\cdot\frac{1}{10^3}$$

for et ξ mellem 1 og 1.1.

Det ses, at $f(1.1) < P_2(1.1) = -0,19$.

Tilnærmes $f(1.1)$ med $P_2(1.1)$, så er

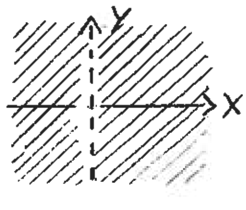
$$\underline{|f(1.1)-P_2(1,1)|} = |R_2(1.1)| = \frac{2}{3\xi^3}\cdot\frac{1}{10^3} \leqq \frac{2}{3}10^{-3} \underline{< 7\cdot 10^{-4}}.$$

Kombineres dette med, at $f(1.1) < P_2(1.1)$ fås

$P_2(1.1)-0,0007 < f(1.1) < P_2(1.1)$. Altså

$$-0,1907 < f(1.1) < -0,1900.$$

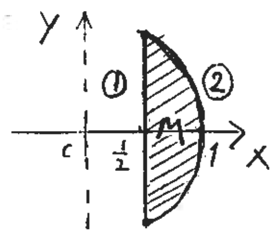
Opgave 2.



1. $f(x,y)=\frac{1-y^2}{x^2}$ er defineret for $x\neq 0$ og $y\in\mathbb{R}$.
Dvs $\underline{Dm(f)} = \underline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\}}$.

$f'_x(x,y)=\frac{-2(1-y^2)}{x^3}=0 \Leftrightarrow y=\pm 1$. $f'_y(x,y)=\frac{-2y}{x^2}=0 \Leftrightarrow y=0$.

Da $\nabla f(x,y)=(f'_x(x,y), f'_y(x,y))\neq(0,0)$ har f ingen stationære punkter.



2. $M=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1 \text{ og } x \geqq \frac{1}{2}\}$.
Da M er begrænset, afsluttet og sammenhængende og da f er kontinuert i hele Dm(f), så har f en global maksimumsværdi og en global minimumsværdi i M.

Opgave 2 fortsat.

Da f hverken har stationære punkter eller undtagelsespunkter i det indre af M, så antages disse værdier på randen af M.

Randundersøgelse:

① : $g_1(y) = f(\frac{1}{2}, y) = 4(1-y^2)$, $y \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

$g_1'(y) = -8y = 0$ og $y \in]-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}[\Leftrightarrow y = 0$.

$g_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$, $g_1(0) = 4$, $g_1(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$.

② : $g_2(x) = f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = 1$ for alle $x \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Ved numerisk sammenligning af disse undersøgelser fås, at den globale maksimumsværdi for $f = 4 = g_1(0) = f(\frac{1}{2}, 0)$. Dvs. denne værdi antages i punktet $(\frac{1}{2}, 0)$.

Opgave 3.

$\underline{V}(x,y,z) = (e^x, -z, y)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. $\mathcal{K}_{\underline{r}}$: $\underline{r}(u) = (u, \sin u, \cos u)$, $u \in [0; 1]$.

$\underline{r}'(u) = (1, \cos u, -\sin u)$

$\underline{V}(\underline{r}(u)) = (e^u, -\cos u, \sin u)$

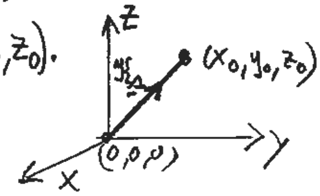
$\underline{V}(\underline{r}(u)) \cdot \underline{r}'(u) = e^u - \cos^2 u - \sin^2 u = e^u - 1$.

$$\mathrm{Tan}(\underline{V}, \mathcal{K}_{\underline{r}}) = \int_{\mathcal{K}_{\underline{r}}} \underline{V} \cdot \underline{e}\, d\mu = \int_0^1 \underline{V}(\underline{r}(u)) \cdot \underline{r}'(u)\, du = \int_0^1 (e^u - 1)\, du$$

$$= [e^u - u]_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2.$$

2. $\mathcal{K}_{\underline{s}}$: $\underline{s}(u) = (ux_0, uy_0, uz_0) = u(x_0, y_0, z_0)$, $u \in [0; 1]$,

$\mathcal{K}_{\underline{s}}$ er liniestykket fra $(0,0,0)$ ud til punktet (x_0, y_0, z_0).



$\underline{s}'(u) = (x_0, y_0, z_0)$

$\underline{V}(\underline{s}(u)) = (e^{ux_0}, -uz_0, uy_0)$

$\underline{V}(\underline{s}(u)) \cdot \underline{s}'(u) = x_0 e^{ux_0}$.

Opgave 3 fortsat.

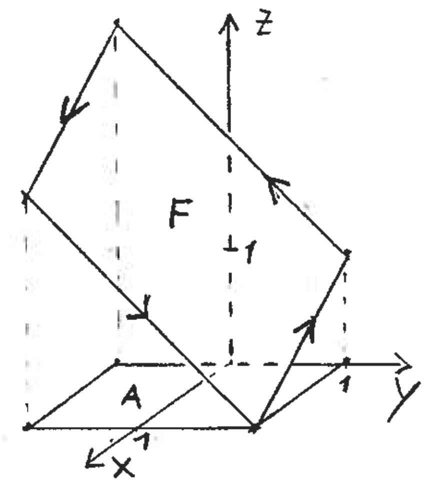
$$\underline{F^*(x_0,y_0,z_0)} = \underline{\mathrm{Tan}(\underline{V}, \mathcal{I}\mathcal{E}_{\underline{s}})} = \int_{\mathcal{I}\mathcal{E}_s} \underline{V}\cdot\underline{e}\,d\mu = \int_0^1 \underline{V}(\underline{s}(u))\cdot\underline{s}'(u)\,du$$

$$= \int_0^1 x_0 e^{ux_0}\,du = \left[e^{ux_0}\right]_0^1 = \underline{e^{x_0}-1}.$$

3. Hvis $\underline{V}$ er et gradientvektorfelt, så er ifølge spm. 2 $F^*(x,y,z) = e^x - 1$ en stamfunktion til $\underline{V}$, men da $\underline{\nabla} F^*(x,y,z) = (e^x,0,0) \neq (e^x,-z,y) = \underline{V}(x,y,z)$, så er $F^*(x,y,z)$ <u>ikke</u> en stamfunktion til $\underline{V}$ og $\underline{V}$ er derfor <u>ikke et gradientvektorfelt</u>.
Eller: Da <u>rot</u> $\underline{V} = (2,0,0) \neq (0,0,0)$, så er $\underline{V}$ <u>ikke</u> <u>et gradientvektorfelt</u>.

Opgave 4.

1. $F: \underline{r}(u,v) = (u, v, 2-u-v)$, $u \in [0;1]$, $v \in [-1;1]$.
Da $x = u$ og $y = v$, så er $z = 2-x-y$.
Dvs. F er grafen for funktionen $\underline{h(x,y) = 2-x-y}$ for $(x,y) \in A$.
Da $z = 2-x-y \Leftrightarrow x+y+z = 2$, hvor $x \in [0;1]$ og $y \in [-1;1]$, så er F et parallelogram.



2. $f(x,y,z) = x+y+z$, $f(\underline{r}(u,v)) = 2$.

$$\underline{r}'_u(u,v) = (1,0,-1)$$

$$\underline{r}'_v(u,v) = (0,1,-1)$$

$$\underline{N}(u,v) = \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = (1,1,1), \quad \|\underline{N}(u,v)\| = \sqrt{3}.$$

$$\underline{\text{Massen}} = \int_F f(x,y,z)\,d\mu = \int_{v=-1}^{1}\int_{u=0}^{1} f(\underline{r}(u,v))\,\|\underline{N}(u,v)\|\,du\,dv$$

$$= \int_{v=-1}^{1}\left(\int_{u=0}^{1} 2\sqrt{3}\,du\right)dv = \underline{4\sqrt{3}} = 2\,\mathrm{Ar}(F).$$

$$\underline{V}(x,y,z) = (x,y,xy), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Opgave 4 fortsat.

3. $\underline{\text{rot}}\,\underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} = (x, -y, 0)$, $\underline{\text{rot}}\,\underline{V}(\underline{r}(u,v)) = (u, -v, 0)$.
Med den valgte orientering af randkurven ∂F for F er $\underline{n}_F = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{\underline{N}(u,v)}{\|\underline{N}(u,v)\|}$. (Højrekonvention)
Af Stokes' sætning fås da
$\underline{\text{Cirk}(\underline{V}, \partial F)} = \underline{\text{Flux}(\underline{\text{rot}}\,\underline{V}, F)} = \int_F \underline{n}_F \cdot \underline{\text{rot}}\,\underline{V}\, d\mu$
$= \int_{v=-1}^{1} \int_{u=0}^{1} \underline{N}(u,v) \cdot \underline{\text{rot}}\,\underline{V}(\underline{r}(u,v))\, du\, dv = \int_{v=-1}^{1} \left(\int_{u=0}^{1} (u - v)\, du \right) dv \; \underline{= 1}$.

4. Ω: $\underline{r}(u,v,w) = (u, v, w(2-u-v))$,
$u \in [0;1]$, $v \in [-1;1]$, $w \in [0;1]$.
($\underline{r}(u,v,w)$ er liniestykket fra $(u,v,0)$ til $(u,v,2-u-v)$)

$$\text{Jacobi}_{\underline{r}}(u,v,w) = \left| \begin{vmatrix} \underline{r}'_u & \underline{r}'_v & \underline{r}'_w \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w & -w & 2-u-v \end{vmatrix} \right|$$
$$= 2 - u - v.$$

$\partial\Omega$ er den lukkede overflade af Ω orienteret med udadrettet enhedsnormalvektor.
$\text{div}\,\underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 2$.
Af Gauss' sætning fås da
$\underline{\text{Flux}(\underline{V}, \partial\Omega)} = \int_\Omega \text{div}\,\underline{V}\, d\mu = \int_{w=0}^{1}\int_{v=-1}^{1}\int_{u=0}^{1} 2\, \text{Jacobi}(u,v,w)\, du\, dv\, dw$
$= 2\int_{w=0}^{1} \left(\int_{v=-1}^{1} \left(\int_{u=0}^{1} (2 - u - v)\, du \right) dv \right) dw = 2 \int_{v=-1}^{1} \left(\tfrac{3}{2} - v \right) dv = \underline{6}$.
$(= 2\,\text{Vol}(\Omega))$