DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 16. maj 2011.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.
Vægtning: Opgave 1: **20**%, opgave 2: **25**%, opgave 3: **25**% og opgave 4: **30**%.

OPGAVE 1

En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ har været undersøgt med Maple på følgende måde:

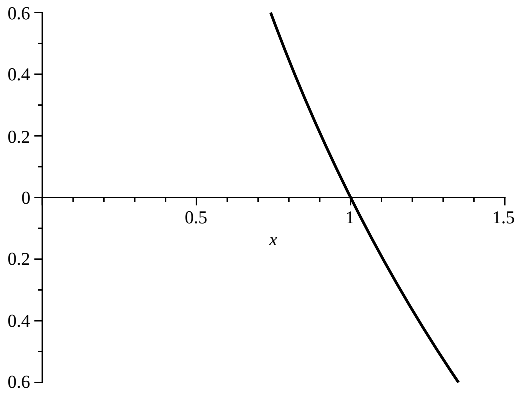
```
> mtaylor(f(x),x=1,3)
```

$$2-2x+(x-1)^2$$

```
> diff(f(x),x,x,x);
```

$$-\frac{4}{x^3}$$

```
> plot(f(x),x=0.7..1.3,scaling=constrained,view=[0..1.5,-0.6..0.6]);
```



Lad $P_2(x)$ betegne det approksimerende andengradspolynomium for $f(x)$ med udviklingspunktet $x_0=1$, og lad $R_2(x)=f(x)-P_2(x)$ betegne den tilsvarende restfunktion.

1. Opskriv $P_2(x)$, og angiv $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$.
2. Bestem $P_2(1.1)$, og vurdér ved hjælp af $R_2(x)$ den maksimale fejl der begås hvis man benytter værdien $P_2(1.1)$ i stedet for værdien $f(1.1)$.

OPGAVE 2

En reel funktion f af to reelle variable er givet ved

$$f(x,y)=\frac{1-y^2}{x^2}.$$

1. Bestem definitionsmængden for f, og gør rede for at f ikke har stationære punkter.

En delmængde af enhedscirkelskiven i (x,y)-planen med centrum i Origo er givet ved

$$M=\{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1 \text{ og } x\geq \frac{1}{2}\,\}.$$

2. Skitsér M, og bestem den globale maksimumsværdi (størsteværdien) for f på M samt et punkt hvori denne værdi antages.

Opgavesættet fortsætter, vend ⟶

OPGAVE 3

I (x,y,z)-rummet er der givet vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (\mathrm{e}^x, -z\,, y)$ og en rumkurve $\mathcal{K}_\mathbf{r}$ med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = \big(u, \sin(u), \cos(u)\big)\,,\; u \in [\,0\,,\,1\,]\,.$$

1. Udregn prikproduktet $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u)$, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}_\mathbf{r}$.

En anden rumkurve $\mathcal{K}_\mathbf{s}$ er givet ved

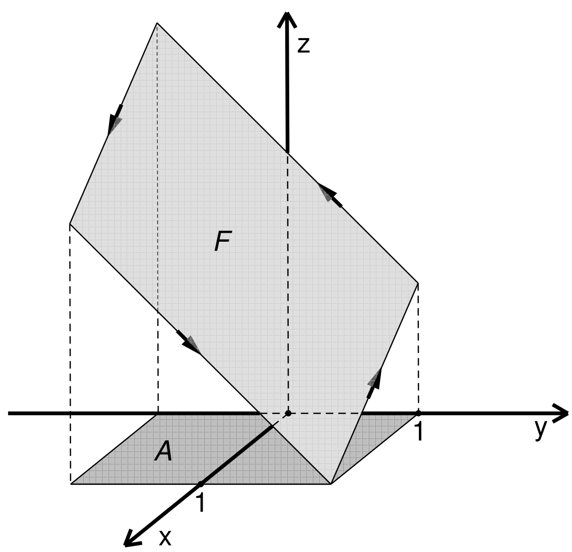
$$\mathbf{s}(u) = \big(u \cdot x_\mathrm{o}\,, u \cdot y_\mathrm{o}\,, u \cdot z_\mathrm{o}\big)\,,\; u \in [\,0\,,\,1\,]$$

hvor x_o, y_o og z_o er tre vilkårlige reelle tal.

2. Udregn prikproduktet $\mathbf{V}(\mathbf{s}(u)) \cdot \mathbf{s}'(u)$, og bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs $\mathcal{K}_\mathbf{s}$.

3. Undersøg om $\mathbf{V}$ er et gradientvektorfelt.

OPGAVE 4



I (x,y)-planen er der givet en reel funktion $h(x,y)$ og en afsluttet, begrænset punktmængde A som afgrænses af rektanglet med hjørnerne $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ og $(0,1)$. I det følgende betragtes en flade F som består af den del af grafen for h som ligger (lodret) over A. Det oplyses at F kan parametriseres ved

$$(x,y,z) = \mathbf{r}(u,v) = (u\,,\,v\,,\,2-u-v) \text{ hvor } u \in [\,0\,,\,1\,] \text{ og } v \in [\,-1\,,\,1\,]\,.$$

1. Angiv regneforskriften for $h(x,y)$ for $(x,y) \in A$.

2. En massetæthedsfunktion er givet ved $f(x,y,z) = x+y+z$. Bestem massen $\displaystyle\int_F f(x,y,z)\,d\mu$.

I (x,y,z)-rummet er der givet vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (\,x\,,\,y\,,\,x \cdot y\,)$.

3. Bestem det tangentielle kurveintegral (cirkulationen) af $\mathbf{V}$ langs randkurven ∂F for F idet ∂F orienteres som vist på figuren.

4. Lad Ω betegne det massive rumlige område som ligger (lodret) mellem A og F. Bestem fluxen af $\mathbf{V}$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω.