DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 17. maj 2010.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for forårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver har samme vægt.
NB: Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Det nedenstående klip er fra et Maple-ark hvor en reel funktion $f(x,y)$ med definitionsmængden $\left\{ (x,y) \mid x^2+y^2<1 \right\}$ bliver undersøgt:

```
> f(0,0);
```

$$1$$

```
> diff(f(x,y),x);
```

$$-\frac{2x}{1-x^2-y^2}$$

```
> diff(f(x,y),y);
```

$$-\frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

```
> diff(f(x,y),x,x);
```

$$-\frac{2}{1-x^2-y^2}-\frac{4x^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

```
> diff(f(x,y),y,y);
```

$$-\frac{2}{1-x^2-y^2}-\frac{4y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

```
> diff(f(x,y),x,y);
```

$$-\frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

1. Find samtlige stationære punkter for f.
2. Find samtlige ekstrema for f.
3. Opstil det approksimerende polynomium P_2 af højst anden grad for f med udviklingspunktet $(x_0,y_0)=(0,0)$.

OPGAVE 2

1. Bestem en symmetrisk 3×3 matrix $\underline{\underline{A}}$ der opfylder ligningen

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot z \text{ for alle } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

2. Bestem en ortogonal 3×3 matrix $\underline{\underline{Q}}$ der opfylder ligningen

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 2x_1^2+y_1^2 \text{ for alle } x_1,y_1,z_1\in\mathbb{R},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er matricen fra spørgsmål 1.

Opgavesættet fortsætter. Vend $\longmapsto$

OPGAVE 3

En cylinderflade $\mathcal{F}$ har ledekurven $y = \cosh(x)$ for $x \in [0;1]$ og er desuden fastlagt ved $z \in [0;1]$.

1. Find en parameterfremstilling for $\mathcal{F}$, og bestem den tilhørende Jacobi-funktion.
2. Bestem arealet af $\mathcal{F}$.

En parametriseret rumkurve $\mathcal{K}$ er givet ved $\mathbf{r}(u) = \left(u, \cosh(u), \frac{1}{2}\right)$ for $u \in [0;1]$.

3. Bestem Jacobi-funktionen der hører til $\mathbf{r}$, og udregn kurveintegralet

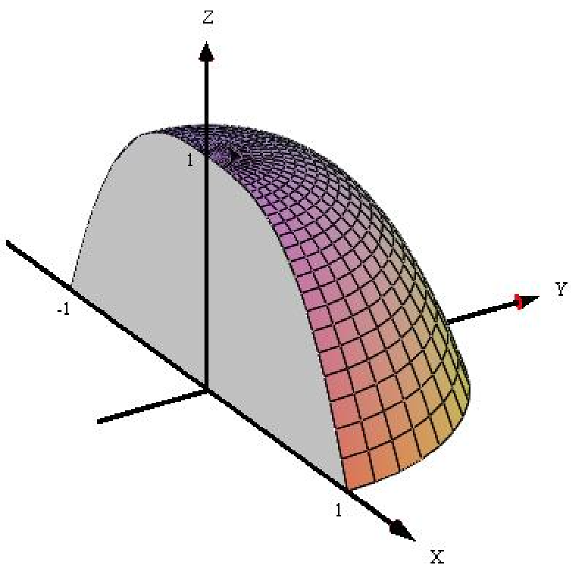
$$\int_{\mathcal{K}} 2z \, \mathrm{d}s\,.$$

.

OPGAVE 4

Et massivt område Ω i rummet er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v,w) = \left(u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v), w\cdot(1-u^3)\right) \text{ for } u \in [0;1], v \in [0;\pi] \text{ og } w \in [0;1]\,.$$



1. Bestem rumfanget af Ω.

Lad $\mathcal{F}$ betegne overfladen af Ω. Om et vektorfelt $\mathbf{V}(x,y,z)$ oplyses det at $\mathrm{div}\mathbf{V}(x,y,z) = 5$ og at $\mathbf{rot}\,\mathbf{V}(x,y,z) = (0,-2,0)$.

2. Bestem fluxen af $\mathbf{V}(x,y,z)$ ud gennem $\mathcal{F}$.

Lad $\mathcal{K}$ betegne randkurven af den del af $\mathcal{F}$ som ligger i (x,z)-planen.

3. Bestem det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x,y,z)$ langs med $\mathcal{K}$ idet $\mathcal{K}$ forsynes med en selvvalgt orientering som vises på en skitse.

- SLUT -