DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i efterårspensum den 5. december 2023.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: Der er fire opgaver, og de vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Et polynomium P er givet ved:

$$P(z) = (z^2 + 4 \cdot z + 4) \cdot (z^2 - 6 \cdot z + 10)\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$$

1. P fremstår som et produkt af to andengradspolynomier. Bestem for hver af de to andengradspolynomier dets diskriminant og brug diskriminanten til at bestemme andengradspolynomiets rødder.

2. Bestem rødderne for P og angiv deres algebraiske multiplicitet. Opskriv P på fuldstændig faktoriseret form.

3. Polynomiumsbrøken
$$\frac{(z^2 + 4 \cdot z + 4) \cdot (z^2 - 6 \cdot z + 10)}{z + 2}$$
kan omskrives til et tredjegradspolynomium på formen
$$Q(z) = a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d\,.$$
Bestem a, b, c og d.

OPGAVE 2

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Der er givet det lineære ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (a-1) \cdot x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + (1 - a^2) \cdot x_3 &= a \end{aligned}$$

1. Bestem determinanten af ligningssystemets koefficientmatrix. For hvilke værdier af a er determinanten lig mod 0?

2. Bestem for hver af værdierne $a = -1$, $a = 0$ og $a = 2$ den fuldstændige løsning af ligningssystemet.

OPGAVE 3

I $\mathbb{R}^2$ er der givet vektorerne $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$ og $\mathbf{v}_2 = (1,-2)$. Endvidere er en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med hensyn til standardbasen e i $\mathbb{R}^2$ givet ved afbildningsmatricen

$$_e\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. Gør rede for at vektorsættet $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, og opskriv basisskiftematricen $_e\mathbf{M}_v$ der skifter fra v-koordinater til standard e-koordinater.
2. Det oplyses at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer for f hørende til to forskellige egenværdier for f. Til hvilken egenværdi hører $\mathbf{v}_1$ og til hvilken hører $\mathbf{v}_2$?
3. Bestem afbildningsmatricen $_v\mathbf{F}_v$ for f med hensyn til basen v.
4. En vektor $\mathbf{u}$ er med hensyn til basen v givet ved koordinatvektoren

   $$_v\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Opskriv $f(\mathbf{u})$ som en linearkombination af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

OPGAVE 4

Der er givet matricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$. Vi betragter et lineært 1. ordens differentialligningssystem:

$$\begin{bmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet, og forklar hvordan egenværdierne for $\mathbf{A}$ indgår i løsningen.
2. Der findes netop én løsning til differentialligningssystemet som opfylder

   $$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   Bestem den løsning.

Opgavesættet er slut.