DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve i efterårspensum den 5. december 2021

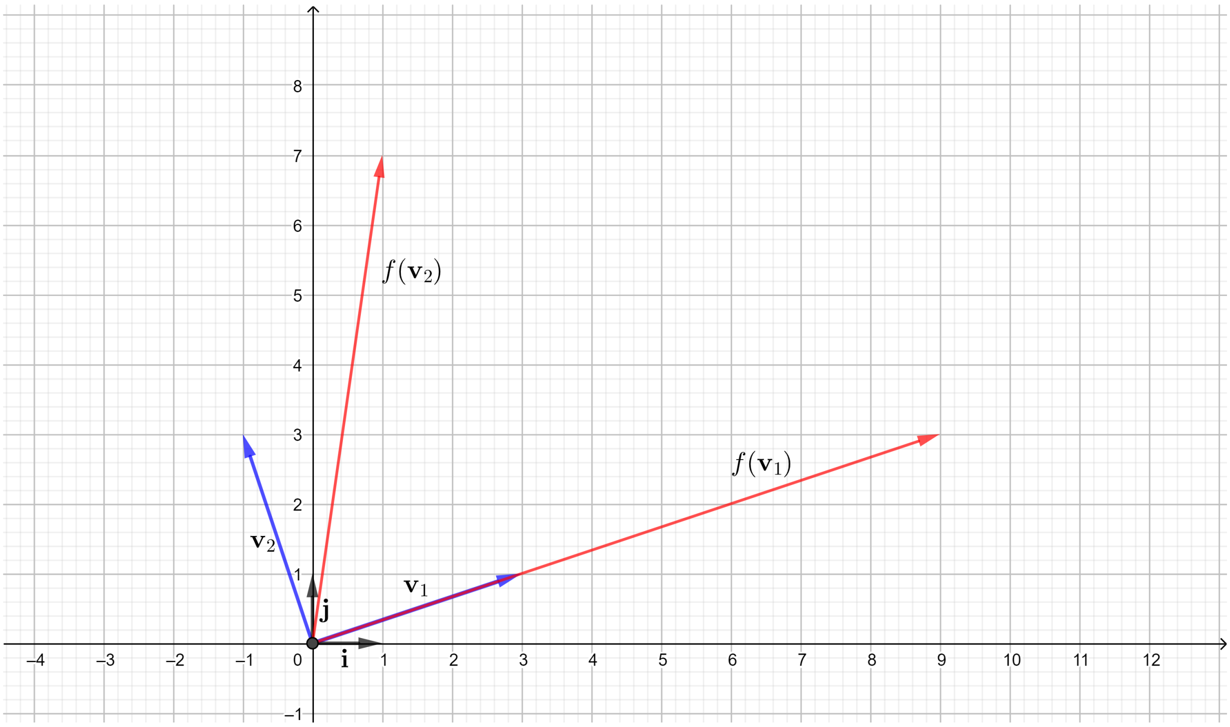
Kursus Navn: Matematik 1.

Kursus nr. 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må benyttes. Om regler i øvrigt henvises til "PensumOgRegler", se ProgramE21 på kursets hjemmeside.

Essayopgave

I planen er givet et sædvanligt retvinklet $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$-koordinatsystem. Vi betragter vektorrummet $G2$ af geometriske vektorer i planen afsat ud fra origo O. To vektorer $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}$ og $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ danner en basis $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ for $G2$. Vi betragter en lineær afbildning $f : G2 \to G2$ der er givet ved billederne $f(\mathbf{v}_1)$ og $f(\mathbf{v}_2)$ som vises på figuren (NB: koordinaterne for alle de viste vektorer er heltallige).



1. Gør rede for at $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor for f, mens $\mathbf{v}_2$ ikke er det.

2. Billederne $f(\mathbf{v}_1)$ og $f(\mathbf{v}_2)$ kan skrives som linearkombinationer af $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ således:
$$f(\mathbf{v}_1) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \text{ og } f(\mathbf{v}_2) = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2\,.$$
Find tallene a, b, c og d og opstil afbildningsmatricen ${}_v\mathbf{F}_v$ for f med hensyn til basen v. Bestem koordinatvektoren ${}_vf(\mathbf{v}1+\mathbf{v}2)$.

3. Lad A, B og C betegne endepunkterne af $\mathbf{v}_1$ henholdsvis $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_2$.
a) Bestem arealet af det parallogram som har hjørnerne O, A, B og C.
b) Bestem arealet af det parallelogram som har hjørnerne O, $f(A)$, $f(B)$ og $f(C)$.

4. Bestem afbildningsmatricen ${}_e\mathbf{F}_e$ for f med hensyn til basen $e = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

5. Bestem en ny basis for $G2$ med hensyn til hvilken afbildningsmatricen for f bliver en diagonalmatrix.

6. Hvis vi nu ændrer f således at $f(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{v}_1$, hvor $k \in \mathbb{R}$, og $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2$, findes der så værdier af k således at f ikke er diagonaliserbar?

`Opgaven er slut.`