DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve i efterårspensum den 7. december 2020
Kursus Navn: Matematik 1.
Kursus nr. 01005/01015/01016
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må benyttes. Om regler i øvrigt henvises til dokumentet PensumOgReglerE20 på kursets hjemmeside.

Opgave 1, variant. Stilles og besvares i Maple TA

Lad a og b være reelle konstanter. Et inhomogent lineært ligningssystem har totalmatricen $\mathbf{T}$ givet ved

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & a-1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem for $a=-1$ og $b=0$ en af løsningerne $\mathbf{x}_0$ til ligningssystemet.
2. Konstanternes værdier er uforandret $a=-1$ og $b=0$. Angiv en vektor $\mathbf{w}$ som udspænder løsningsrummet for det tilsvarende homogene ligningssystem.
3. Antag $a=1$. For hvilken værdi af b har ligningssystemet løsninger?
4. Vi betragter nu ligningssystemet med værdierne for a og b som i forrige spørgsmål. Vektorerne $(\alpha, 0, \beta)$ og $(\gamma, 1, \delta)$ er løsninger til det inhomogene system. Angiv værdierne af α, β, γ og δ.
5. Undersøg om der findes værdier af a og b for hvilket ligningssystemet har netop én løsning.

Opgave 2, variant. Stilles og besvares i Maple TA

En første ordens inhomogen lineær differentialligning er givet ved:

$$x'(t) + 3x(t) = \mathrm{e}^{3t}\cos(t)\,.$$

1. Det oplyses differentialligningen har en partikulær løsning på formen

   $$x_p(t) = a \cdot \mathrm{e}^{3t}\cos(t) + b \cdot \mathrm{e}^{3t}\sin(t) \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

   Bestem a og b.
2. Bestem en løsning $x_h(t)$ til den tilsvarende homogene differentialligning. Vi betinger yderligere at $x_h(t)$ ikke må være nulløsningen.
3. Fra de foregående spørgsmål har vi $x_h(t)$ og $x_p(t)$. Hvilke af følgende tre funktioner er løsning til den inhomogene differentialligning

   $$4 \cdot x_h(t) + x_p(t)\,,\ x_h(t)\,,\ x_h(t) + 3 \cdot x_p(t)\,.$$
4. Begrund dine svar i forrige spørgsmål ved brug af struktursætningen.

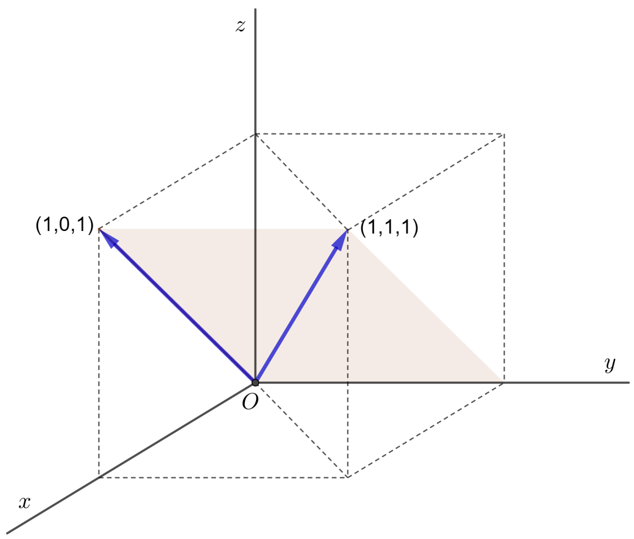
Om en homogen andenordens lineær differentialligning oplyses at dens fuldstændige løsning er givet ved:

$$x(t) = k_1 \cdot \mathrm{e}^{-5t}\cos(3t) + k_2 \cdot \mathrm{e}^{-5t}\sin(3t) \quad (*)\,.$$

5. Bestem en af rødderne λ i den til differentialligningen hørende karakterligning.

6. Bestem k_1 og k_2 således at løsningen $(*)$ opfylder $x(0) = 4$ og $x'(0) = 5$.

Opgave 3. Essayopgave. Svar uploades i pdf.



Et underrum U i $\mathbb{R}^3$ er udspændt af vektorerne $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$ og $\mathbf{u}_2 = (1,1,1)$. Det oplyses desuden at U er kernen for en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

1. Gør rede for at $\dim(U) = 2$, og bestem en ortonormal basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ for U.

2. Gør rede for at tallet 0 er en egenværdi for f, og bestem $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ og $f(2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$.

3. Det oplyses nu yderligere at f har egenværdien 4 og at E_4 er det ortogonale komplement til U. Bestem en diagonalmatrix Λ og en ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ således at

$${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

hvor ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ betegner afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbasis for $\mathbb{R}^3$.

4. Bestem afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{G}_{\mathrm{e}}$ for en anden lineær afbildning $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ som også har U som kerne, og som opfylder at $(1,2,3) \in g(\mathbb{R}^3)$.

`Opgaven er slut.`