DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i efterårspensum den 8. december 2019.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et homogent lineært ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 + a \cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1. Opskriv for $a = 1$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.
2. For en bestemt værdi af a har ligningssystemets koefficientmatrix rangen 2. Angiv for den værdi af a to lineært uafhængige løsninger til ligningssystemet.

OPGAVE 2

Et 2-dimensionalt vektorrum V har basen $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. En lineær afbildning

$$f : V \to \mathbb{R}^3$$

har med hensyn til basen v i V og standardbasen e i $\mathbb{R}^3$ afbildningsmatricen

$$_e\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Angiv koordinatvektoren for vektoren

   $$\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2$$

   med hensyn til basen v, og bestem billedvektoren $f(\mathbf{v}_3)$.
2. Løs ligningen

   $$f(\mathbf{v}) = (1, 2, 10).$$
3. Bestem dimensionen af billedrummet $f(V)$ og dimensionen af $\ker(f)$.
4. Angiv (med begrundelse) en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ikke tilhører $f(V)$.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

I vektorrummet $\mathbb{R}^3$ udstyret med det sædvanlige prikprodukt er der givet tre vektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1,-1,1)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1,0,-1) \text{ og } \mathbf{v}_3 = (1,1,0)\,.$$

Om en matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ oplyses at den har egenrummene $E_6 = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$ og $E_{-3} = \text{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

1. Betragt matricen $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$. Angiv en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ som opfylder identiteten
$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{V}\,.$$
2. Gør rede for at enhver vektor i E_6 er ortogonal på enhver vektor i E_{-3} .
3. Bestem en positiv ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ som opfylder identiteten
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$
hvor $\mathbf{\Lambda}$ er den i spørgsmål 1 nævnte diagonalmatrix.

OPGAVE 4

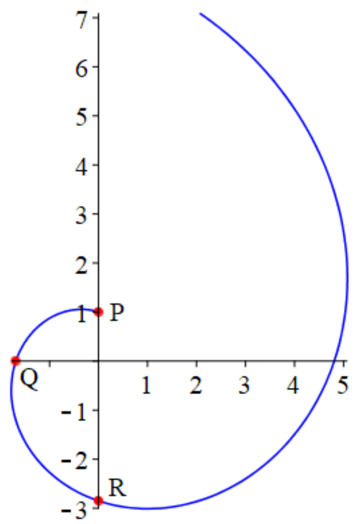
For en given matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betragtes et lineært 1. ordens differentialligningssystem på formen

$$\begin{bmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Det oplyses at systemets fuldstændige komplekse løsning er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot \mathrm{e}^{(2+6i)t} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{(2-6i)t} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ hvor } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ og } t \in \mathbb{R}\,.$$

1. Find egenværdierne for $\mathbf{A}$ og de tilhørende egenrum.
2. Vis at den partikulære løsning hvor $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
3. Betragt den partikulære løsning omtalt i forrige spørgsmål. På figuren nedenfor ses den banekurve, som punktet $(x_1(t), x_2(t))$ gennemløber i tiden $t \in [0,1]$. Punktet P er begyndelsespunktet, mens Q er det første skæringspunkt med førsteaksen, og R er det første skæringspunkt med andenaksen, se figuren.



Bestem de værdier af $t \in [0,1]$ hvor punktet $(x_1(t), x_2(t))$ passerer Q henholdsvis R.

Opgavesættet er slut.