DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i efterårspensum den 9. december 2018.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

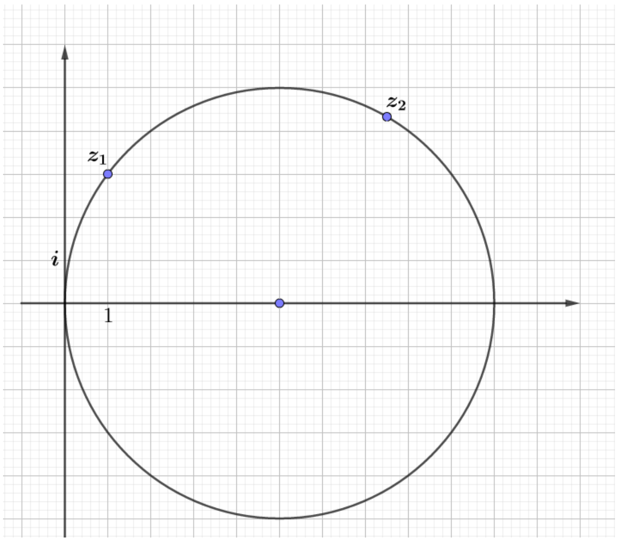
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

En cirkel C i den komplekse talplan er givet ved ligningen $|z-5|=5$.



1. Vis at tallet $z_1 = 1+3i$ ligger på C, og at $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{10}$.
2. Vis at tallet $z_2 = 5\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ opfylder $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{10}$.
3. Vis at ethvert tal z som opfylder $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{10}$ ligger på C.

OPGAVE 2

Lad $\mathbf{A}$ betegne koefficentmatricen og $\mathbf{T}$ totalmatricen for et inhomogent lineært ligningssystem som har trappeformen

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Opskriv den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved at den har afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^5$ og $\mathbb{R}^4$.

2. Bestem dimensionen af $\ker(f)$ og dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^5)$.

Opgavesættet fortsætter $\longrightarrow$

OPGAVE 3

I vektorrummet $\mathbb{R}^3$ udstyret med det sædvanlige prikprodukt er der givet vektorsættet

$$v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = ((1,1,1), (1,0,-1), (-1,1,0)) \,.$$

1. Gør rede for at v er en basis for $\mathbb{R}^3$.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved at der for enhver vektor $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\}$ gælder

$$f(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u}\,,$$

og for enhver $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ gælder

$$f(\mathbf{u}) = -4\mathbf{u}\,.$$

2. Bestem afbildningsmatricerne ${}_v\mathbf{F}_v$ og ${}_e\mathbf{F}_e$ for f med hensyn til basen v, henholdsvis standardbasen e for $\mathbb{R}^3$.
3. Find en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for f, som opfylder at én af basisvektorerne er ensrettet med $\mathbf{v}_3$.

OPGAVE 4

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et lineært 1. ordens differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 3-a \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

1. Gør rede for at når $a = 3$, kan ligningssystemet ikke løses ved diagonaliseringsmetoden.
2. For en anden værdi af a er

   $$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{(4+i)t} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i)\,\mathrm{e}^{(4+i)t} \\ \mathrm{e}^{(4+i)t} \end{bmatrix}$$

   en partikulær løsning til differentialligningssystemet. Opstil for denne værdi af a den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningssystemet.
3. Bestem den værdi af a som har været benyttet i spørgsmål 2.

Opgavesættet er slut.