DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timersprøve i efterårspensum den 10. december 2017.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et inhomogent lineært ligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= a^2 + 10a - 3 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= a^2 + 3 \end{aligned}$$

1. Opskriv for $a = 1$ den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.

2. For hvilke værdier af a er talsættet

$$(x_1, x_2, x_3) = (-7, 7, -1)$$

   en løsning til ligningssystemet?

OPGAVE 2

En symmetrisk matrix $\mathbf{A}$ er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Opstil det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ på fuldstændig faktoriseret form, og angiv rødderne med deres algebraiske multiplicitet.

2. Bestem en ortogonal matrix $\mathbf{Q}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ som opfylder

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$

3. Betragt den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ som har afbildningsmatricen $\mathbf{A}$ med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Betragt endvidere det 2-dimensionale underrum U i $\mathbb{R}^4$ som er givet ved

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u} \right\}.$$

   Vis at enhedsvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

   tilhører U, og bestem en vektor $\mathbf{v}_2$ således at sættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en ortonormal basis for U.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

I vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ af uendeligt mange gange differentiable komplekse funktioner af en reel variabel er et 4-dimensionalt underrum U givet ved sin basis:

$$a = \left(\cos(t), \sin(t), \mathrm{e}^t\cos(t), \mathrm{e}^{(1+i)\cdot t}\right).$$

En lineær afbildning $f : U \to U$ er givet ved forskriften

$$f(x(t)) = x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) .$$

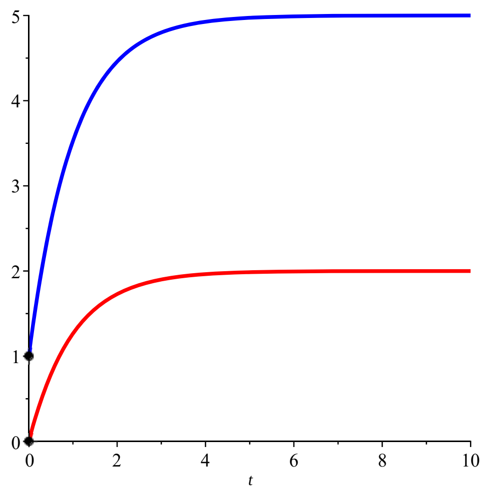
1. Vis at de to basisvektorer $\mathrm{e}^t\cos(t)$ og $\mathrm{e}^{(1+i)\cdot t}$ tilhører kernen for f.
2. Bestem afbildningsmatricen ${}_a\mathbf{F}_a$ for f.
3. Bestem koordinatvektoren for funktionen $5\cos(t)$ med hensyn til basis a, og benyt ${}_a\mathbf{F}_a$ ved løsning af ligningen
$$f(x(t)) = 5\cos(t).$$

OPGAVE 4

Et lineært 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Bestem ved hjælp af egenværdier og egenvektorer for systemmatricen den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.
2. Bestem den løsning til differentialligningssystemet som er illustreret på figuren, hvor grafen for $x_1(t)$ er blå og grafen for $x_2(t)$ rød. Forklar udfra de fundne forskrifter for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ hvorfor $x_1(t)$ går mod 5 og $x_2(t)$ mod 2, når t går mod uendelig.



3. Angiv en anden ikke konstant løsning til differentialligningssystemet som også opfylder at $x_1(t)$ går mod 5 og $x_2(t)$ mod 2, når t går mod uendelig.

Opgavesættet er slut.