DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Afleveringskoden til MapleTA 1-timesprøven er **3541**

Skriftlig 2-timersprøve i efterårspensum den 5. december 2016.

Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005/01015/01016

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

OPGAVE 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. Et inhomogent lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med fire ubekendte x_1, x_2, x_3 og x_4 har totalmatricen $\mathbf{T}$ givet ved

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a \end{bmatrix}.$$

1. Angiv den fuldstændige løsning til ligningssystemet i hvert af de tilfælde hvor $a = -1$, $a = 0$ og $a = 1$.

2. Bestem de værdier af a for hvilke $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 0)$ er en løsning.

OPGAVE 2

I $\mathbb{R}^3$ er der givet vektorerne $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -4, 0)$ og $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

1. Gør rede for at vektorsættet $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, og opskriv basisskiftematricen ${}_e\mathbf{M}_v$ der skifter fra v-koordinater til standard e-koordinater.

2. Opskriv koordinatvektoren ${}_v\mathbf{u}$ for $\mathbf{u}$ med hensyn til basis v, og bestem koordinatvektoren ${}_e\mathbf{u}$ for $\mathbf{u}$ med hensyn til standardbasis e.

For en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gælder $f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_2$ og $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$.

3. Gør rede for at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er egenvektorer for f, og bestem de egenværdier som de hører til.

4. Bestem afbildningsmatricen ${}_v\mathbf{F}_v$ for f med hensyn til basis v og afbildningsmatricen ${}_e\mathbf{F}_e$ for f med hensyn til standardbasis e.

5. Er $\mathbf{u}$ en egenvektor for f?

OPGAVE 3

Betragt vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R})$ af uendeligt mange gange differentiable reelle funktioner defineret på $\mathbb{R}$. Betragt endvidere i $C^\infty(\mathbb{R})$ underrummet $P_2(\mathbb{R})$ af polynomier af højst anden grad udstyret med monomiebasis $(1, t, t^2)$ og underrummet $P_3(\mathbb{R})$ af polynomier af højst tredje grad udstyret med monomiebasis $(1, t, t^2, t^3)$.

En lineær afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ er givet ved forskriften

$$(\star) \qquad f(x(t)) = x'(t) - t \cdot x(t) \ .$$

1. Bestem den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning $f(x(t)) = 0$.

Opgavesættet fortsætter ⟶

Vi betragter nu f givet ved forskriften $(\star)$ som en afbildning fra $P_2(\mathbb{R})$ til $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Bestem billederne $f(1), f(t)$ og $f(t^2)$ af basisvektorerne i $P_2(\mathbb{R})$, og gør rede for at billedrummet $f(P_2(\mathbb{R}))$ er et underrum i $P_3(\mathbb{R})$.

Til sidst betragter vi f givet ved forskriften $(\star)$ som en afbildning fra $P_2(\mathbb{R})$ til $P_3(\mathbb{R})$.

3. Opstil afbildningsmatricen ${}_m\mathbf{F}_m$ for f med hensyn til monomiebasen i $P_2(\mathbb{R})$ og monomiebasen i $P_3(\mathbb{R})$. Bestem kernen for f og dimensionen af billedrummet $f(P_2(\mathbb{R}))$.

OPGAVE 4

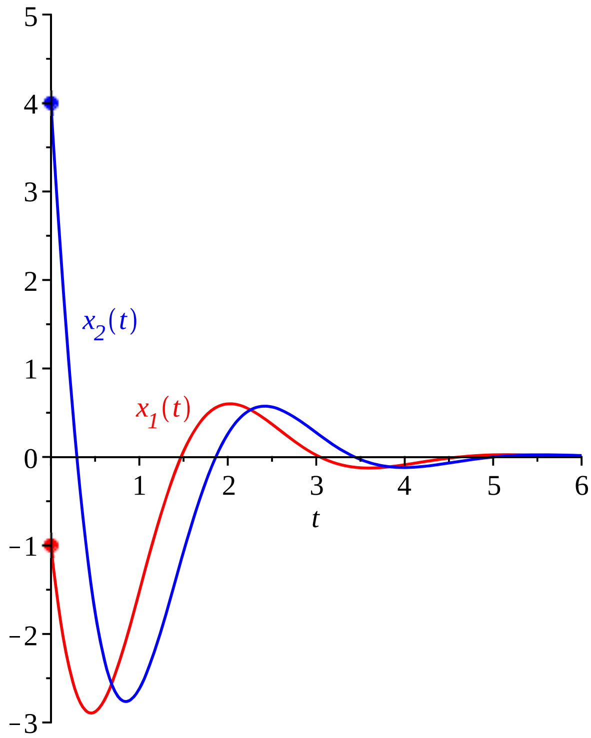
Et homogent lineært 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter er givet ved

$$\begin{bmatrix} {x_1}'(t) \\ {x_2}'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en reel 2×2-matrix. Om $\mathbf{A}$ oplyses endvidere at den har egenvektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix}$ hørende til egenværdien $\lambda = -1+2i$.

1. Bestem den anden egenværdi som $\mathbf{A}$ har, og angiv en tilhørende egenvektor. Opskriv den fuldstændige *komplekse* løsning til differentialligningssystemet.

2. Bestem den løsning til differentialligningssystemet som er illustreret på figuren. Svaret skal være udtrykt i reelle tal og reelle funktioner.



Opgavesættet er slut.