Mat 1. 2-timersprøve den 7. december 2015.

JE 4.12.15

Opgave 1

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Givet

```
> A:=<<1,0,0,0>|<0,a-1,a,0>|<0,a,a-1,0>|<1,0,0,1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a & 0 \\ 0 & a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og

```
> b:=<1,1,-1,-1>;
```

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål 1

$a = 2$: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Totalmatricen er

```
> T:=<subs(a=2,A)|b>;
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

som har trappeformen

```
> trap('T'):=ReducedRowEchelonForm(T);
```

$$trap(T) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Heraf aflæses, at

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Spørgsmål 2

Ved opløsning efter første søjle og dernæst efter tredje søjle fås

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} a-1 & a \\ a & a-1 \end{bmatrix}\right) = (a-1)^2 - a^2 = 1 - 2a \quad \text{for alle } a \in \mathbb{R}.$$

Med Maple fås

```
> Determinant(A);
```

$$-2a+1$$

Da $\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$, haves

$\rho(\mathbf{A}) = 4$ for $a \neq \frac{1}{2}$.

For $a = \frac{1}{2}$ er $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som har trappeformen

```
> trap('A'):=ReducedRowEchelonForm(subs(a=1/2,A));
```

$$trap(A) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Heraf aflæses, at $\rho(\mathbf{A}) = 3$ for $a = \frac{1}{2}$.

Spørgsmål 3

Matrixligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsningsmængden

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2+t \\ t \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

Dvs. antal frie parametre $= n - \rho(\mathbf{A}) = 4 - \rho(\mathbf{A}) = 1 <=> \rho(\mathbf{A}) = 3 <=> a = \frac{1}{2}$ ifølge spørgsmål 2.

For $a = \frac{1}{2}$ fås

```
> x=LinearSolve(subs(a=1/2,A),b,free=t);
```

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 + t_3 \\ t_3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hvilket netop er den ønskede løsningsmængde.

Matrixligningen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har således løsningsmængden $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} <=> a = \frac{1}{2}$.

Opgave 2

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er lineær og ${}_e\mathbf{F}_e = [{}_ef(\mathbf{e}_1) \ {}_ef(\mathbf{e}_2) \ {}_ef(\mathbf{e}_3)] = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Spørgsmål 1

$\mathbf{v} = (1, -3, -3) \in \mathbb{R}^3$.

Da ${}_ef(\mathbf{v}) = {}_e\mathbf{F}_e \, {}_e\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, så er $f(\mathbf{v}) = (-2, 4)$.

Spørgsmål 2

$\mathbf{x} \in \ker f <=> f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} <=> {}_ef(\mathbf{x}) = \mathbf{0} <=> {}_e\mathbf{F}_e \, {}_e\mathbf{x} = \mathbf{0} <=>$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \operatorname{trap}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dvs. $\mathbf{x} \in \ker f <=> x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 <=> \mathbf{x} = t_1 (1, 1, 0) + t_2 (-2, 0, 1) \ , t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

$((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ er derfor en basis for $\ker f$ og $\dim f(\mathbb{R}^3) = \rho(\mathbf{F}) = 1$.

$P_2(\mathbb{R})$ med monomie-basis m = $(1, x, x^2)$ og $P_1(\mathbb{R})$ med monomie-basis m = $(1, x)$.
$g : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ er lineær og fastlagt ved, at $g(1) = 1 - 2x$, $g(x) = -1 + 2x$ og $g(x^2) = 2 - 4x$.

Spørgsmål 3

$_{\mathrm{m}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}} = [{}_{\mathrm{m}}g(1)\ {}_{\mathrm{m}}g(\mathrm{x})\ {}_{\mathrm{m}}g(x^2)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$. Vi har da

$g(P(x)) = -2 + 4x \iff {}_{\mathrm{m}}g(P(x)) = {}_{\mathrm{m}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}\ {}_{\mathrm{m}}P(x) = \mathbf{F}\ {}_{\mathrm{m}}P(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Sættes $P(x) = 1 - 3x - 3x^2$, så følger det af spørgsmål 1, at $g(P(x)) = -2 + 4x$.
Sættes $Q(x) = -x^2$, så følger det umiddelbart, at $g(-x^2) = -g(x^2) = -2 + 4x$.

Opgave 3

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ har egenværdierne -2 og 5 med $E_{-2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ og $E_5 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

Spørgsmål 1

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in E_5$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in E_{-2}$ er lineært uafhængige, da de tilhørende egenværdier er forskellige.

Sættes $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, så er $\mathbf{V}$ regulær og $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, hvor $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & o \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål 2

$\mathrm{C}\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} + \mathrm{B})\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & o \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (5+b)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (5+b)\mathbf{v}_1$.

Dvs. $\mathbf{v}_1$ er en egentlig egenvektor for $\mathbf{C}$ med tilhørende egenværdi $5 + b$.

$\mathrm{C}\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} + \mathrm{B})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & o \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-2+b)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$
$(-2+b)\mathbf{v}_2$.

Dvs. $\mathbf{v}_2$ er en egentlig egenvektor for $\mathbf{C}$ med tilhørende egenværdi $-2 + b$.
Samtlige egenværdier for 2×2 matricen $\mathbf{C}$ er derfor $5 + b$ og $-2 + b$ med de tilhørende egenvektorrum

$$E_{5+b} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \text{ og } E_{-2+b} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Opgave 4

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

$x_1'(t) = x_2(t)$

$x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Spørgsmål 1

```
> A:=<<0,3>|<1,-2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(A,output=list);
```

$$\left[\left[-3, 1, \left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[1, 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right]$$

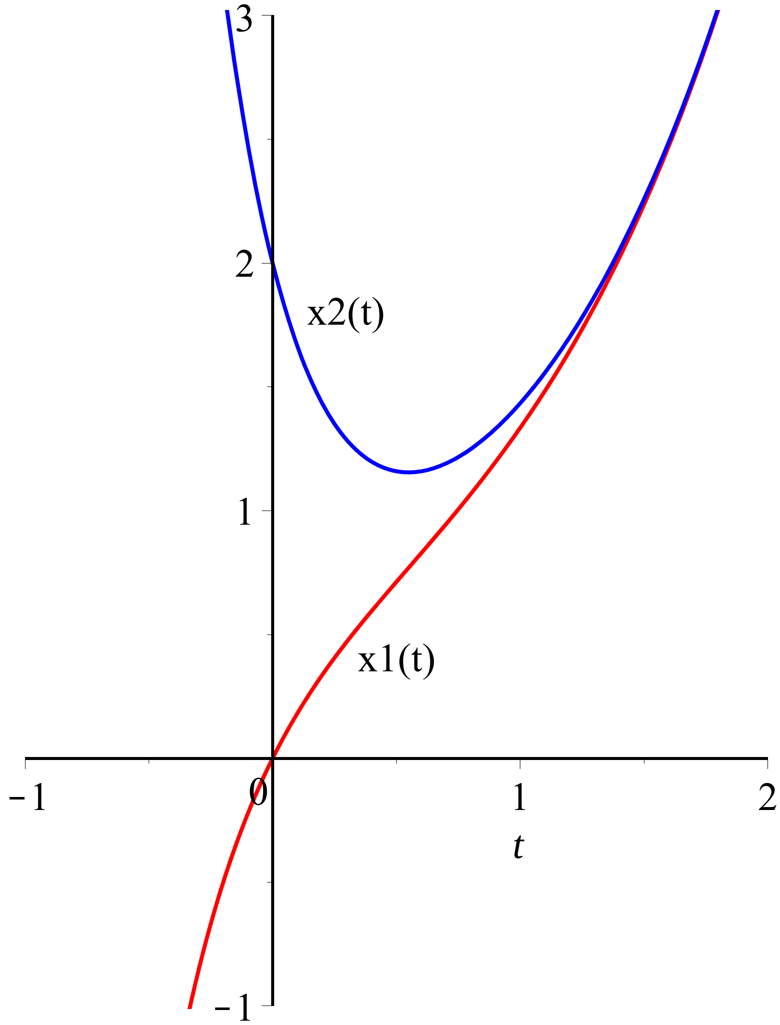
Heraf aflæses, at samtlige egenværdier for systemmatricen **A** er 1 og -3 med de tilhørende egenvektorrum $E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ og $E_{-3} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_1$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \in E_{-3}$ er lineært uafhængige, da de tilhørende egenværdier er forskellige.

Samtlige løsninger til differentialligningssystemet er da

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål 2



Af figuren fremgår, at $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 2)$.

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad <=>$$

$c_1 - c_2 = 0$ og $c_1 + 3\,c_2 = 2$ $<=>$ $(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Den søgte løsning er da

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-3\,t} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, $t \in \mathbb{R}$. Eller skrevet ud

$$x_1(\mathrm{t}) = \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{-3\,t}$$

$$x_2(\mathrm{t}) = \frac{1}{2} e^{t} + \frac{3}{2} e^{-3\,t}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål 3

Antag, at der findes et $t \in \mathbb{R}$, således at

$x_1(t) = x_2(t) <=> \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-3t} = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-3t} <=> -\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, hvilket er en modstrid.

Altså $x_1(t) \neq x_2(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

De to grafer på figuren skærer således ikke hinanden for noget $t \in \mathbb{R}$.