DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 7. december 2015.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Lad a være et vilkårligt reelt tal. En matrix $\mathbf{A}$ og en vektor $\mathbf{b}$ er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a & 0 \\ 0 & a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Løs for $a = 2$ matrixligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Bestem for enhver værdi af a determinanten af $\mathbf{A}$ og rangen af $\mathbf{A}$.

3. Find den værdi af a for hvilken matrixligningen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsningsmængden

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

OPGAVE 2

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^2$ givet ved afbildningsmatricen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. Givet $\mathbf{v} = (1, -3, -3) \in \mathbb{R}^3$. Bestem $f(\mathbf{v})$.

2. Bestem en basis for kernen for f og dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

Lad $P_1(\mathbb{R})$ betegne mængden af reelle polynomier af højst første grad og $P_2(\mathbb{R})$ mængden af reelle polynomier af højst anden grad. En lineær afbildning $g : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ er fastlagt ved

$$g(1) = 1 - 2 \cdot x, \ g(x) = -1 + 2 \cdot x \ \text{ og } \ g(x^2) = 2 - 4 \cdot x.$$

3. Bestem to forskellige polynomier $P(x), Q(x) \in P_2(\mathbb{R})$ som opfylder

$$g\big(P(x)\big) = g\big(Q(x)\big) = -2 + 4 \cdot x.$$

Opgavesættet fortsætter $\longrightarrow$

OPGAVE 3

En matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ har egenværdierne -2 og 5 med de tilhørende egenrum

$$E_{-2} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \text{ og } E_5 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

1. Angiv en regulær matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der opfylder $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Lad $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ være givet ved $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ hvor $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Vis at $\mathbf{C}$ har egenværdierne $-2+b$ og $5+b$ med de tilhørende egenrum

$$E_{-2+b} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \text{ og } E_{5+b} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

OPGAVE 4

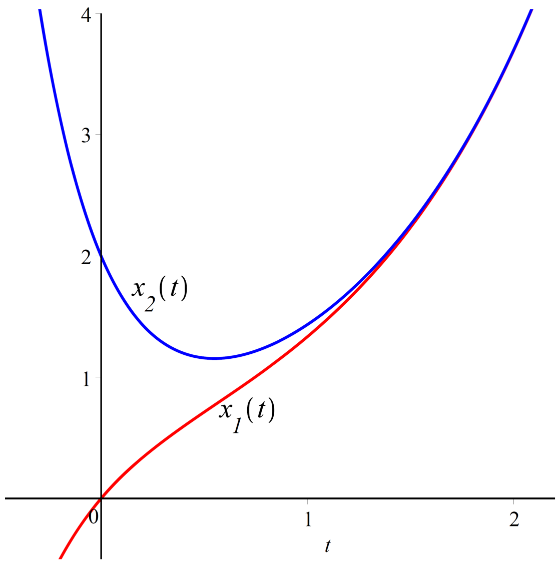
Et differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} x_1{}'(t) &= x_2(t) \\ x_2{}'(t) &= 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot x_2(t) \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$. Lad $\mathbf{A}$ betegne den tilsvarende systemmatrix.

1. Bestem samtlige egenværdier og egenvektorer for $\mathbf{A}$, og opstil ved hjælp heraf løsningsmængden for differentialligningssystemet.

2. En partikulær løsning $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ til differentialligningssystemet er nedenfor illustreret ved at graferne for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er indsat i samme koordinatsystem. Bestem forskrifterne for $x_1(t)$ og $x_2(t)$.



3. Gør rede for at de to grafer som er vist på figuren ovenfor, ikke skærer hinanden for noget $t \in \mathbb{R}$.

Opgavesættet er slut.