1. Mat 1. 2-timers prøve 8.12.2014.

Opgave 1.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 3x_3 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= -5 \end{aligned}$$

1.

$$\underline{\underline{T}} = [\underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{b}}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \underline{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{Trap}(\underline{\underline{T}})}.$$

Det fuldstændigt reducerede lineære ligningssystem:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 3x_3 = -3 \\ \quad x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$. Sættes $x_3 = t$ fås:

$\underline{(x_1, x_2, x_3) = (-3, -2, 0) + t(-3, -1, 1) \,,\ t \in \mathbb{R}.}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineær og

$${}_e\underline{\underline{F}}_e = \left[{}_e\underline{f(\underline{e}_1)} \ {}_e\underline{f(\underline{e}_2)} \ {}_e\underline{f(\underline{e}_3)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}.$$

2. $\underline{x} \in \ker f \Leftrightarrow f(\underline{x}) = \underline{0} \Leftrightarrow {}_e\underline{\underline{F}}_e \, {}_e\underline{x} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \underset{1.}{\Leftrightarrow}$

$\underline{x} = t(-3, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}$. Dvs. $\underline{\ker f = \operatorname{span}\{(-3, -1, 1)\}}$.

Da $\dim f(\mathbb{R}^3) = \rho({}_e\underline{\underline{F}}_e) = \rho(\underline{\underline{A}}) \underset{1.}{=} 2$ og da de to billedvektorer $f(\underline{e}_1) = (1, 1, -2, 1)$ og $f(\underline{e}_2) = (0, -2, 4, 1)$ er lineært uafhængige, er

$\underline{(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)) = ((1, 1, -2, 1), (0, -2, 4, 1)) \text{ en basis for } f(\mathbb{R}^3)}.$

Opgave 2.

$$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = q(t) \,,\ t \in \mathbb{R}.$$

1. $q(t) = 0$: $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0 \,,\ t \in \mathbb{R}$.

Karakterligning: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda = 4 \text{ (dobbelt)}.$$

Opgave 2 fortsat.

Samtlige reelle løsninger:

$\underline{x_{Hom}(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}}$, $\underline{t \in \mathbb{R}}$, $\underline{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$.

2. $q(t) = e^{2it}$: $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = e^{2it}$, $t \in \mathbb{R}$.

$x(t) = c e^{2it}$ er en løsning $\Leftrightarrow$

$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = -4ce^{2it} - 16ice^{2it} + 16ce^{2it} = e^{2it}$ for alle $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow c(12 - 16i) = 1 \Leftrightarrow \underline{c} = \frac{1}{12-16i} = \frac{12+16i}{400} = \underline{\frac{3}{100} + \frac{4}{100} i}$.

3. $q(t) = 4\cos 2t$: $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 4\cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

$e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$. Da $4\cos 2t = 4\,Re(e^{2it})$ er

$x_0(t) \underset{2.}{=} 4 Re\left(\left(\frac{3}{100} + \frac{4}{100} i\right)(\cos 2t + i \sin 2t)\right)$

$\quad = 4\left(\frac{3}{100}\cos 2t - \frac{4}{100}\sin 2t\right) = \frac{3}{25}\cos 2t - \frac{4}{25}\sin 2t$

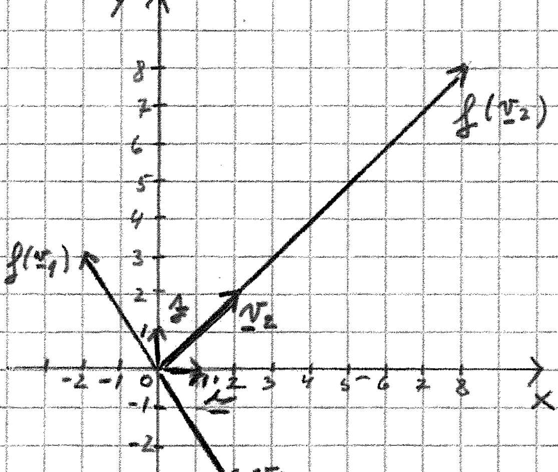
en partikulær løsning til differentialligningen.

Samtlige reelle løsninger er da ifølge struktursætningen

$\underline{x(t)} = x_0(t) + x_{Hom}(t)$

$\quad \underline{\underset{1.}{=} \frac{3}{25}\cos 2t - \frac{4}{25}\sin 2t + c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}, \ t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$.

Opgave 3.



$e = (\underline{i}, \underline{j})$ og $v = (\underline{v}_1, \underline{v}_2)$.
Vektorrummet af geometriske vektorer i planen betegnes V_g^2.
$f: V_g^2 \to V_g^2$ lineær.

1. Af den givne figur aflæses, at

$\underline{{}_e\underline{\underline{M}}_v} = \left[{}_e\underline{v}_1 \ \ {}_e\underline{v}_2\right] = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$.

Opgave 3 fortsat.

2. Da det af den givne figur aflæses, at $f(\underline{v}_1) = -\underline{v}_1$ og $f(\underline{v}_2) = 4\underline{v}_2$, så er $\underline{v}_1$ en egenvektor for f med tilhørende egenværdi -1 og $\underline{v}_2$ en egenvektor for f med tilhørende egenværdi 4.

3. Da $f(\underline{v}_1) = -1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2$ og $f(\underline{v}_2) = 0\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2$ er

$$\underline{\underline{{}_vF_v}} = \left[{}_v\underline{f(\underline{v}_1)}\ {}_v\underline{f(\underline{v}_2)}\right] = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}.$$

$$\underline{{}_e\underline{\underline{F}}_v} = {}_e\underline{\underline{M}}_v\ {}_v\underline{\underline{F}}_v = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}}.$$

4. ${}_v\underline{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{X} = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = 5\underline{j}$.

$$\underline{{}_e\underline{f(X)}} = {}_e\underline{\underline{F}}_v\ {}_v\underline{X} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}}.$$

Dvs. $f(\underline{X}) = 10\underline{i} + 5\underline{j}$.

5. $f(a\underline{i} + b\underline{j}) = 10\underline{i} + 5\underline{j}$.

Af 4. følger, at $f(5\underline{j}) = 10\underline{i} + 5\underline{j}$ og da $\underline{X} = 5\underline{j}$ er den eneste vektor, der opfylder ligningen $f(\underline{X}) = 10\underline{i} + 5\underline{j}$ ($\dim \ker f = 0$), så er $\underline{a = 0}$ og $\underline{b = 5}$.

Opgave 4.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Samtlige reelle løsninger er

$$(*) \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Opgave 4 fortsat.

1. $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = -1 \\ 2c_1 - c_2 = 13 \end{cases}$.

Heraf fås $c_1 = 5$ og $c_2 = -3$.

Den søgte løsning er da

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 5e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = 5e^{3t} - 6e^{5t} \\ x_2(t) = 10e^{3t} + 3e^{5t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. Af (*) aflæses, at

$\underline{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en egentlig egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi $\lambda_1 = 3$ og at $\underline{\underline{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egentlig egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi $\lambda_2 = 5$.

Dvs. $\lambda_A = \begin{cases} 3 \text{ (enkelt)}, & E_3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}. \\ 5 \text{ (enkelt)}, & E_5 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}. \end{cases}$

3. Sættes $\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_1 & \underline{\underline{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ og $\underline{\underline{\Lambda}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$,

så er $\underline{\underline{V}}$ regulær og $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix}.$$

Differentialsystemet er da

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = \frac{23}{5} x_1(t) - \frac{4}{5} x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{4}{5} x_1(t) + \frac{17}{5} x_2(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$