DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 8. december 2014.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Et reelt lineært ligningssystem er givet ved:

$$\begin{aligned} x_1+3x_3 &= -3 \\ x_1-2x_2+x_3 &= 1 \\ -2x_1+4x_2-2x_3 &= -2 \\ x_1+x_2+4x_3 &= -5 \end{aligned}$$

1. Bestem trappeformen til ligningssystemets totalmatrix, og opskriv den fuldstændige løsning til ligningssystemet på standardparameterform.

En lineær afbildning $f:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ har med hensyn til standardbaserne i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$ afbildningsmatricen

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Bestem kernen for f, og angiv en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

OPGAVE 2

En lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter har formen

$$x''(t)-8x'(t)+16x(t)=q(t).$$

hvor t er en reel variabel, og $q(t)$ er en kontinuert funktion.

1. Antag $q(t)=0$ for $t\in\mathbb{R}$. Find løsningerne til differentialligningens karakterligning, og opstil ved hjælp heraf den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen.

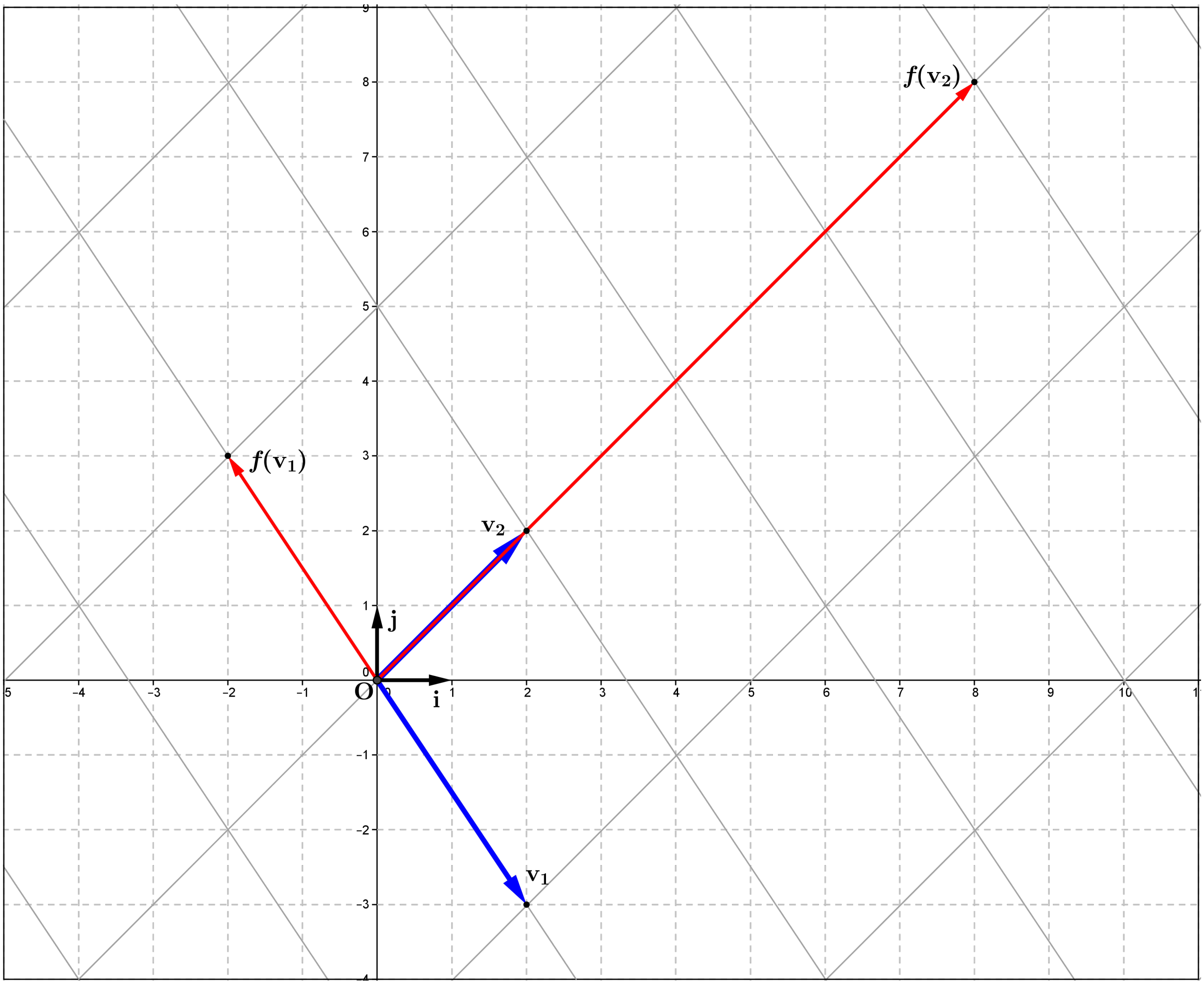
2. Antag $q(t)=\mathrm{e}^{2it}$ for $t\in\mathbb{R}$. Bestem et tal $c\in\mathbb{C}$ således at funktionen $c\mathrm{e}^{2it}$ er en løsning til differentialligningen.

3. Antag $q(t)=4\cos(2t)$ for $t\in\mathbb{R}$. Bestem ved hjælp af resultaterne i spørgsmål 1 og 2 den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

I planen er der givet et sædvanligt retvinklet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem, hvor alle vektorer tænkes afsat ud fra origo. Den tilhørende standardbasis $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes med e. En ny basis $v = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er indtegnet i koordinatsystemet, se figuren nedenfor.



1. Opstil basisskiftematricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{M}_{\mathrm{v}}$ som skifter fra v-koordinater til e-koordinater.

Ved en lineær afbildning f af mængden af vektorer i planen ind i mængden af vektorer i planen bliver vektorerne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ afbildet som vist på figuren.

2. Gør rede for at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer for f, og angiv deres tilhørende egenværdier.

3. Bestem den til f hørende afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$, og vis at den til f hørende afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$ er givet ved
$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}. $$

4. En vektor $\mathbf{x}$ er givet ved sin koordinatvektor med hensyn til basis v således: ${}_{\mathrm{v}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   Bestem koordinatvektoren for $f(\mathbf{x})$ med hensyn til standardbasen.

5. Bestem to tal a og b som opfylder
$$ f(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}. $$

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 4

I et givet system af to lineære førsteordens differentialligninger med konstante koefficienter er de to ubekendte funktioner benævnt $x_1(t)$ og $x_2(t)$. Samtlige løsninger til differentialligningssystemet er givet ved

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ for } t \in \mathbb{R} \text{ og } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1. Bestem den løsning til differentialligningssystemet som opfylder

$$x_1(0) = -1 \text{ og } x_2(0) = 13.$$

Lad $\mathbf{A}$ betegne differentialligningssystemets systemmatrix.

2. Angiv de to egenværdier for $\mathbf{A}$, og opskriv for hver af egenværdierne det tilhørende egenrum.

3. Opstil differentialligningssystemet.

`Opgavesættet er slut.`