1 Mat 1. 2-timers prøve 4.12.2013.

Opgave 1.

$$\underline{\underline{T}} = [\underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{b}}] \rightarrow \text{trap}(\underline{\underline{T}}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

1. Antal ligninger $= 3$ og antal ubekendte $= 4$.
   $\rho(\underline{\underline{A}}) = 3$ og $\rho(\underline{\underline{T}}) = 3$.
2. Det fuldstændigt reducerede lineære ligningssystem er

$$\begin{matrix} x_1 & & & +2x_4 = -2 \\ & x_2 & & -x_4 = 0 \\ & & x_3 & = 4 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x_1 = -2-2x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 4 \end{matrix}$$

$\underline{x}_1 = (1,0,4,1)$, $\underline{x}_2 = (1,-2,0,1)$ og $\underline{x}_3 = (0,-1,4,-1)$.
Ved indsætning ses, at kun $\underline{x}_3 = (0,-1,4,-1)$ er en løsning til ligningssystemet.

3. Samtlige løsninger til det tilhørende homogene lineære ligningssystem er
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-2,1,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Opgave 2.

$\underline{v}_1 = (1,0,1)$, $\underline{v}_2 = (0,1,0)$ og $\underline{v}_3 = (1,0,-1)$.

1.
$${}_e\underline{\underline{V}} = [{}_e\underline{v}_1 \; {}_e\underline{v}_2 \; {}_e\underline{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad \rho({}_e\underline{\underline{V}}) = 3.$$

Da $\rho({}_e\underline{\underline{V}}) = 3$ er $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ tre lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$ og dermed er $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ en basis for $\mathbb{R}^3$.

2. Af $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}_2 = 2\underline{v}_2$ og $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}_3 = -\underline{v}_3$ aflæses, at $\underline{v}_1$ er en egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi 1, $\underline{v}_2$ er en egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi 2 og $\underline{v}_3$ er en egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ med tilhørende egenværdi -1. Tallene 1, 2 og -1 er således tre forskellige egenværdier for 3×3 matricen $\underline{\underline{A}}$. Samtlige egenværdier for $\underline{\underline{A}}$ er

Opgave 2 fortsat.

derfor 1, 2 og −1 med $gm(1) = am(1) = 1$,
$gm(2) = am(2) = 1$ og $gm(-1) = am(-1) = 1$.
$(1 \leq gm(\lambda) \leq am(\lambda))$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineær og ${}_e\underline{\underline{F}}_e = \underline{\underline{A}}$. Dvs. ${}_e\underline{f(\underline{x})} = {}_e\underline{\underline{F}}_e\, {}_e\underline{x} = \underline{\underline{A}}\, {}_e\underline{x}$.

3. Da $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ er en egenvektor for $f \Leftrightarrow {}_e\underline{v} = \underline{v}$ er en egenvektor for ${}_e\underline{\underline{F}}_e = \underline{\underline{A}}$, så følger det af 1. og 2., at $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for f. Dermed er

$$ {}_v\underline{\underline{F}}_v = \left[{}_v\underline{f(\underline{v}_1)}\ {}_v\underline{f(\underline{v}_2)}\ {}_v\underline{f(\underline{v}_3)} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Lambda}}. $$

(Vi har jo $f(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 = 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3$, $f(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_2 = 0\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3$ og $f(\underline{v}_3) = -\underline{v}_3 = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 - 1\underline{v}_3$.)

4.
$$ {}_e\underline{\underline{M}}_v = {}_e\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad {}_v\underline{\underline{M}}_e = {}_e\underline{\underline{M}}_v^{-1} = {}_e\underline{\underline{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. $$

$$ \underline{\underline{A}} = {}_e\underline{\underline{F}}_e = {}_e\underline{\underline{M}}_v\, {}_v\underline{\underline{F}}_v\, {}_v\underline{\underline{M}}_e = {}_e\underline{\underline{V}}\, \underline{\underline{\Lambda}}\, {}_e\underline{\underline{V}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. $$

Opgave 3.

1. $\frac{dx(t)}{dt} + t\,x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

$$ P(t) = \int t\,dt = \tfrac{1}{2}t^2. $$

$x_{Hom}(t) = c\,e^{-P(t)} = c\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

$f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ er lineær og givet ved

$$ f(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt} + t\,x(t). $$

2. $x(t) \in \ker f \Leftrightarrow f(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt} + t\,x(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R} \overset{1.}{\Leftrightarrow}$
$x(t) = c\,e^{-\frac{1}{2}t^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Dvs.

$\ker f = \operatorname{span}\{ e^{-\frac{1}{2}t^2} \} = \{ x(t) \in C^1(\mathbb{R}) \mid x(t) = c\,e^{-\frac{1}{2}t^2},\ c \in \mathbb{R} \}$.

Opgave 3.

3. $g(t) = f(t-2) = 1 + t(t-2) = t^2 - 2t + 1$.

$f(x(t)) = g(t) \iff \frac{dx(t)}{dt} + t\,x(t) = t^2 - 2t + 1,\ t \in \mathbb{R}$.

Da netop $f(t-2) = g(t)$ ($t-2$ har genereret højresiden), så er $x_0(t) = t-2$ en partikulær løsning til ligningen.

Af 1. og struktursætningen fås da samtlige løsninger til ligningen:

$\underline{x(t)} = x_0(t) + x_{Hom}(t) = \underline{t - 2 + c\,e^{-\frac{1}{2}t^2}},\ \underline{t \in \mathbb{R}},\ \underline{c \in \mathbb{R}}.$

Opgave 4.

Karakterligningen $\lambda^2 + a\lambda + 25 = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + 25\,x(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

2. $\underline{a = 0}$: $\lambda^2 + 25 = 0 \iff \underline{\lambda = \pm 5i}$.

Samtlige løsninger til differentialligningen er da

$\underline{x(t) = c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t},\ \underline{t \in \mathbb{R}},\ \underline{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}.$

2. Hvis $x(t) = e^{-4t}\cos 3t$ er en løsning til differentialligningen, så må $-4 \pm 3i$ være rødder i karakterpolynomiet. Vi har da

$\lambda^2 + a\lambda + 25 = ((\lambda+4) - 3i)((\lambda+4) + 3i) = (\lambda+4)^2 + 9$

$= \lambda^2 + 8\lambda + 25$. Dvs. $\underline{a = 8}$.

3. $\underline{a = 8}$: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 8\frac{dx(t)}{dt} + 25\,x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$.

$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \overset{2.}{\iff} \lambda = -4 \pm 3i$.

Samtlige løsninger til differentialligningen er da

$x(t) = c_1 e^{-4t}\cos 3t + c_2 e^{-4t}\sin 3t,\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$x'(t) = -3c_1 e^{-4t}\sin 3t - 4c_1 e^{-4t}\cos 3t + 3c_2 e^{-4t}\cos 3t - 4c_2 e^{-4t}\sin 3t.$

$x(t)$ en løsning gennem $(0,3)$ med vandret tangent $\iff$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = 3 \\ x'(0) = -4c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \iff (c_1, c_2) = (3, 4).$$

Opgave 4 fortsat.

Den søgte partikulære løsning er da

$x(t) = 3e^{-4t}\cos 3t + 4e^{-4t}\sin 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$