DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 9. december 2013.
Kursus Navn: Matematik 1. **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Om et inhomogent lineært ligningssystem oplyses at dets totalmatrix $\mathbf{T}$ ved fuldstændig reduktion opnår formen

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Angiv antallet af ligninger og ubekendte i ligningssystemet. Bestem endvidere rangen af ligningssystemets koefficientmatrix og totalmatrix.
2. Undersøg hvilke af de følgende talsæt der tilhører ligningssystemets løsningsmængde:

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,4,1)\,,\ \mathbf{x}_2 = (1,-2,0,1)\,,\ \mathbf{x}_3 = (0,-1,4,-1)\,.$$

3. Opskriv på standard-parameterform løsningsmængden for det til ligningssystemet hørende homogene lineære ligningssystem.

OPGAVE 2

I $\mathbb{R}^3$ er der givet vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1)\,,\ \mathbf{v}_2 = (0,1,0)\,,\ \mathbf{v}_3 = (1,0,-1)\,.$$

1. Gør rede for at vektorsættet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Om en reel 3×3 matrix $\mathbf{A}$ oplyses at $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_3$.

2. Gør rede for at $1, 2$ og -1 er egenværdier for $\mathbf{A}$, og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter.

Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning som med hensyn til standardbasen for $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen $\mathbf{A}$.

3. Find afbildningsmatricen for f med hensyn basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
4. Bestem $\mathbf{A}$.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

1. Løs den homogene lineære førsteordens differentialligning $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + t \cdot x(t) = 0$.

En lineær afbildning $f : \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ er givet ved

$$f(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + t \cdot x(t).$$

2. Angiv kernen for f.

3. Funktionen $q(t)$ er givet ved $q(t) = f(t-2)$. Bestem den fuldstændige løsning til ligningen
$$f(x(t)) = q(t).$$

OPGAVE 4

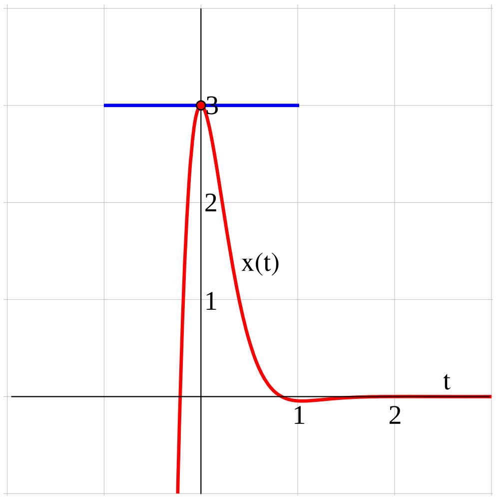
Lad a være et reelt tal. En lineær homogen andenordens differentialligning med konstante koefficienter har karakterligningen
$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + 25 = 0.$$

1. Opskriv differentialligningen, idet den ubekendte funktion betegnes $x(t)$.

2. Bestem for $a = 0$ samtlige løsninger til karakterligningen og find ved hjælp heraf samtlige løsninger til differentialligningen.

3. Bestem den værdi af a for hvilken $x(t) = \mathrm{e}^{-4t} \cdot \cos(3t)$ er en løsning til differentialligningen.

På figuren vises grafen for en partikulær løsning til differentialligningen med $a = 8$. På figuren er også grafens tangent i røringspunktet $(0,3)$ indtegnet.



4. Bestem den på figuren viste partikulære løsning til differentialligningen.

Opgavesættet er slut.