Mat 1. 2-timers prøve 10.12.2012

Opgave 1.

$$x_1 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

1. $\underline{\underline{T}} = \left[\underline{\underline{A}} \,\middle|\, \underline{\underline{0}}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \mathrm{Trap}(\underline{\underline{T}}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]. \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$

2. Sættes $x_3 = t$ fås $(x_1, x_2, x_3) = t(-1,-1,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Tre forskellige løsninger fås for tre forskellige værdier af t. F.eks. for $t = -1$ fås løsningen $\underline{(1,1,-1)}$, for $t = 0$ fås løsningen $\underline{(0,0,0)}$ og for $t = 1$ fås løsningen $\underline{(-1,-1,1)}$.

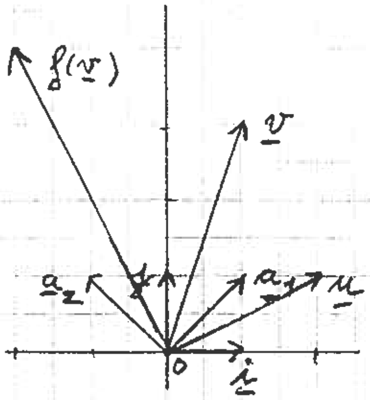
$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er lineær og givet ved
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

3. $(x_1, x_2, x_3) \in \ker f \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3) = (0,0)$
$\underset{2.}{\Leftrightarrow} (x_1, x_2, x_3) = t(-1,-1,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Dvs. $\ker f = \mathrm{span}\{(-1,-1,1)\}$.
Vektoren $\underline{(-1,-1,1)}$ er derfor en basis for $\ker f$ og $\dim(\ker f) = 1$.

4. ${}_e\underline{\underline{f(x_1, x_2, x_3)}} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Dvs. ${}_e\underline{\underline{F}}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}$.

$\underline{\dim(f(\mathbb{R}^3))} = \rho({}_e\underline{\underline{F}}_e) \underset{1.}{=} \underline{2} = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f)$.

Opgave 2.



$f: V_g^2 \rightarrow V_g^2$ lineær og givet, at
$f(\underline{i}) = \underline{a}_1$ og $f(\underline{j}) = \underline{a}_2$.

1. ${}_e\underline{\underline{F}}_e = \left[{}_e\underline{\underline{f(\underline{i})}}\ {}_e\underline{\underline{f(\underline{j})}}\right] = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$.

2. ${}_e\underline{\underline{f(\underline{v})}} = {}_e\underline{\underline{F}}_e\, {}_e\underline{\underline{v}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}}$.

3. $f(\underline{u}) = \underline{v} \Leftrightarrow {}_e\underline{\underline{f(\underline{u})}} = {}_e\underline{\underline{v}} \Leftrightarrow {}_e\underline{\underline{F}}_e\, {}_e\underline{\underline{u}} = {}_e\underline{\underline{v}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Opgave 2 fortsat.

$\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\1&1&3\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\0&2&2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&1\end{array}\right]$. Heraf ${}_e\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ og dermed $\underline{u} = 2\underline{i} + \underline{j}$.

4. ${}_e\underline{\underline{M}}_a = [{}_e\underline{\underline{a}}_1 \; {}_e\underline{\underline{a}}_2] = \begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$, ${}_a\underline{\underline{M}}_e = {}_e\underline{\underline{M}}_a^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Bemærk, at ${}_e\underline{\underline{M}}_a = {}_e\underline{\underline{F}}_e$ og dermed ${}_a\underline{\underline{M}}_e = {}_e\underline{\underline{F}}_e^{-1}$.

${}_a\underline{\underline{F}}_a = {}_a\underline{\underline{M}}_e \, {}_e\underline{\underline{F}}_e \, {}_e\underline{\underline{M}}_a = \begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix} = {}_e\underline{\underline{F}}_e$.

5. ${}_a\underline{\underline{f(\underline{v})}} = {}_a\underline{\underline{M}}_e \, {}_e\underline{\underline{f(\underline{v})}} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

Opgave 3.

Inhomogen lineær differentialligning af 1. orden

$$(*) \quad x'(t) + a\,x(t) = q(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Tilhørende homogene lineære differentialligning af 1. orden

$$(**) \quad x'(t) + a\,x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. For $a = 2$ og $q(t) = e^{3t}$ haves

$(*)$ $x'(t) + 2x(t) = e^{3t}$ og $(**)$ $x'(t) + 2x(t) = 0$.

$x_1(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + 2e^{-2t}$ og $x_2(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + e^{-2t}$.

Da $x_1'(t) + 2x_1(t) = \frac{3}{5}e^{3t} - 4e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{3t} + 4e^{-2t} = e^{3t}$ for alle $t \in \mathbb{R}$ er $x_1(t)$ en løsning til $(*)$.

Da $x_2'(t) + 2x_2(t) = \frac{3}{5}e^{3t} - 2e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{3t} + 2e^{-2t} = e^{3t}$ for alle $t \in \mathbb{R}$ er $x_2(t)$ en løsning til $(*)$.

Da $(x_1(t) - x_2(t))' + 2(x_1(t) - x_2(t)) = (x_1'(t) + 2x_1(t)) - (x_2'(t) + 2x_2(t))$
$= e^{3t} - e^{3t} = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, er $x_1(t) - x_2(t) = e^{-2t}$ en løsning til $(**)$.

(Jævnfør også struktursætningen.)

Opgave 3 fortsat.

2. $x_3(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}$ og $x_4(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$.
Hvis $x_3(t)$ er en løsning til (*) og hvis $x_4(t)$ er en løsning til (*), så må $x_3(t) - x_4(t) = -e^{-t}$ nødvendigvis være en løsning til (**). Thi
$(x_3(t)-x_4(t))' + a(x_3(t)-x_4(t)) = (x_3'(t)+ax_3(t)) - (x_4'(t)+ax_4(t))$
$= q(t) - q(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$. (Jævnfør også struktursætningen). Vi har da, at
$(x_3(t)-x_4(t))' + a(x_3(t)-x_4(t)) = e^{-t} - ae^{-t} = e^{-t}(1-a) = 0$
for alle $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{a = 1}$. Herefter er
$\underline{q(t)} = x_3'(t) + x_3(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \underline{e^{t}}$.
(*) er da $x'(t) + x(t) = e^{t}$, $t \in \mathbb{R}$.
Samtlige løsninger er da ifølge struktursætningen
$x(t) = x_3(t) + x_{Hom}(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + ce^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.
For $c = 1$ fås løsningen $x_4(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Opgave 4.

1. $$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Systemmatricen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \underline{\lambda^2 + 4}$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ egenværdi for $\underline{\underline{A}} \Leftrightarrow P_{\underline{\underline{A}}}(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = \pm 2i}$.

3. $\underline{\underline{A}} - 2i\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\underline{x} = s\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{C}$.

$\underline{\hat{v}_1} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egentlig egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ hørende til egenværdien $\lambda_1 = 2i$.

Opgave 4 fortsat.

$\underline{\underline{v}}_2 = \overline{\underline{\underline{v}}_1} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ er da en egentlig egenvektor for $\underline{\underline{A}}$ hørende til egenværdien $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -2i$.

4. Da $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \in E_{2i}$ og $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \in E_{-2i}$ er to lineært uafhængige egenvektorer for $\underline{\underline{A}}$, er den fuldstændige komplekse løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2it} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \ (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2.$$

5.
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 2. \end{cases}$$

Heraf fås $c_1 = 1$ og $c_2 = 1$.

Den søgte løsning er da.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{2it} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-2it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ie^{2it} + ie^{-2it} \\ e^{2it} + e^{-2it} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\sin 2t \\ x_2(t) = 2\cos 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$