DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve den 10. december 2012.

Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for efterårssemesteret). **Kursus nr.** 01005

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.

Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.

Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.

Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Et reelt lineært ligningssystem er givet ved:

$$x_1 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

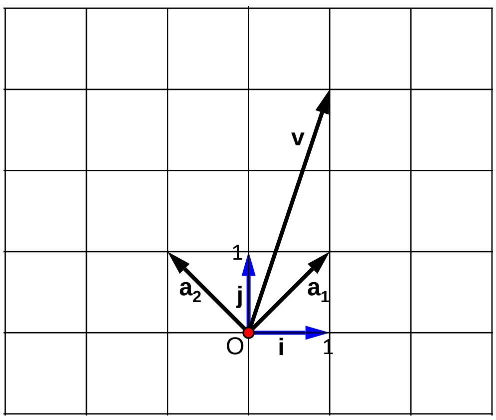
1. Opstil ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$ og bestem trap$(\mathbf{T})$.
2. Opskriv tre forskellige løsninger til systemet.

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3\,,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

3. Angiv en basis for kernen for f.
4. Bestem dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

OPGAVE 2

I planen er der givet et sædvanligt retvinklet $(\,O\,,\,\mathbf{i}\,,\,\mathbf{j}\,)$-koordinatsystem, hvor alle vektorer tænkes afsat ud fra origo. Den tilhørende standardbasis $(\,\mathbf{i}\,,\,\mathbf{j}\,)$ betegnes med e. En ny basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ og en vektor $\mathbf{v}$ er indtegnet i koordinatsystemet som vist på figuren.



Om en lineær afbildning f, som afbilder mængden af plane vektorer ind i mængden af plane vektorer, oplyses at $f(\mathbf{i}) = \mathbf{a}_1$ og $f(\mathbf{j}) = \mathbf{a}_2$.

1. Gør rede for at afbildningsmatricen for f med hensyn til basis e er givet ved:

$$_e\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Bestem koordinatvektoren for billedvektoren $f(\mathbf{v})$ med hensyn til basen e.
3. Bestem en vektor $\mathbf{u}$ som opfylder $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
4. Lad $_a\mathbf{F}_a$ betegne afbildningsmatricen for f med hensyn til basis a. Bestem $_a\mathbf{F}_a$.
5. Bestem koordinatvektoren for billedvektoren $f(\mathbf{v})$ med hensyn til basen a.

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

En 1. ordens inhomogen lineær differentialligning er for $t \in \mathbb{R}$ givet ved

$$(*) \qquad x'(t) + a \cdot x(t) = q(t)$$

hvor a er et reelt tal og $q(t)$ en given reel, kontinuert funktion. Betragt funktionerne:

$$x_1(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{og} \quad x_2(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-2t}\,.$$

1. Vis at hvis der i $(*)$ gælder at $a = 2$ og $q(t) = \mathrm{e}^{3t}$, så er $x_1(t)$ og $x_2(t)$ løsninger til $(*)$, mens differensen $x_1(t) - x_2(t)$ er en løsning til den til $(*)$ svarende homogene lineære differentialligning.

Betragt funktionerne:

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \quad \text{og} \quad x_4(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\,.$$

2. Bestem det tal a og den funktion $q(t)$ i $(*)$ som opfylder at $x_3(t)$ og $x_4(t)$ er løsninger til $(*)$.

OPGAVE 4

Et differentialligningssystem er givet ved

$$\begin{aligned} {x_1}'(t) &= 2 \cdot x_2(t) \\ {x_2}'(t) &= -2 \cdot x_1(t) \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

1. Gør rede for at differentialligningssystemet har systemmatricen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$
2. Opstil det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ og bestem de to komplekse egenværdier for $\mathbf{A}$.
3. Bestem en egentlig egenvektor for hver af de to egenværdier for $\mathbf{A}$.
4. Opskriv ved hjælp af de i spørgsmål 2 og 3 fundne egenværdier og egenvektorer for $\mathbf{A}$ den fuldstændige komplekse løsningsmængde til det givne differentialligningssystem.
5. Bestem den løsning til differentialligningssystemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $x_1(0) = 0$ og $x_2(0) = 2$.

`Opgavesættet er slut.`