1 Mat 1. 2-timers prøve 8.12.2011.

Opgave 1.

1. Homogent lineært ligningssystem $\underline{\underline{A}}_{3\times 3}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}$.

$$\underline{\underline{T}} = \left[\underline{\underline{A}} \,\middle|\, \underline{\underline{0}}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathrm{Trap}(\underline{\underline{T}}).$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Sættes } x_3 = t \text{ fås } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

2. $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Det oplyses, at 2 er en egenværdi for $\underline{\underline{B}}$.

$$\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{B}}}(2) = \underline{\underline{B}} - 2\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}.$$

(NB! $\underline{\underline{B}} - 2\underline{\underline{E}}$ singulær $\Leftrightarrow$ 2 egenværdi for $\underline{\underline{B}}$)

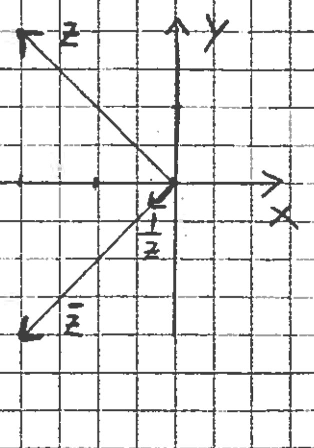
Egenvektorerne for $\underline{\underline{B}}$ hørende til egenværdien 2 findes ved løsning af:

$$(\underline{\underline{B}} - 2\underline{\underline{E}})\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}} \underset{1.}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x}} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Tre forskellige egenvektorer for $\underline{\underline{B}}$ hørende til egenværdien 2 fås for tre forskellige værdier for t. F.eks:

$$t = -1:\ \underline{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.\quad t = 0:\ \underline{\underline{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\quad t = 1:\ \underline{\underline{v}}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2.



1. $z = -2 + 2i$. $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 2$.

$\bar{z} = -2 - 2i$. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{8}\bar{z}$.

2. $x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Karakterligning: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Samtlige løsninger:

$x(t) = c_1 e^{-2t}\cos 2t + c_2 e^{-2t}\sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Opgave 2 fortsat.

Heraf aflæses, at $-2\pm 2i$ er rødderne i karakterligningen.

Vi har da

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_0 = (\lambda-(-2+2i))(\lambda-(-2-2i)) = ((\lambda+2)-2i)((\lambda+2)+2i))$$
$$= (\lambda+2)^2+4 = \lambda^2+4\lambda+8.$$

Dvs $\underline{a_0=8}$ og $\underline{a_1=4}$. Differentialligningen er da

$$x''(t)+4x'(t)+8x(t)=0\ ,\ t\in\mathbb{R}.$$

3. $x(0)=0 \iff c_1=0$ og $c_2\in\mathbb{R}$.

$X(\frac{\pi}{2})=0 \iff c_1=0$ og $c_2\in\mathbb{R}$.

Samtlige løsninger der opfylder $x(0)=0$ og $x(\frac{\pi}{2})=0$ er da

$\underline{x(t)=c_2e^{-2t}\sin 2t}$, $\underline{t\in\mathbb{R}}$, $\underline{c_2\in\mathbb{R}}$.

Der går således uendelig mange løsninger gennem punkterne $(0,0)$ og $(\frac{\pi}{2},0)$.

$x(0)=1 \iff c_1=1$ og $c_2\in\mathbb{R}$.

$x(\pi)=0 \iff c_1=0$ og $c_2\in\mathbb{R}$.

Der er <u>ingen løsninger</u>, der opfylder $x(0)=1$ og $x(\pi)=0$.

Der er således ingen løsninger, der går gennem punkterne $(0,1)$ og $(\pi,0)$.

Opgave 3.

$f: P_2(\mathbb{R})\to P_1(\mathbb{R})$ er lineær og givet ved

$$f(P(x))=(2-x)(P(1)-2P''(x)).$$

$Q_1(x)=1+x+x^2\in P_2(\mathbb{R})$ og $Q_2(x)=-2+x\in P_1(\mathbb{R})$.

1. $\underline{f(Q_1(x))}=(2-x)(Q_1(1)-2Q_1''(x))=(2-x)(3-4)=-(2-x)$
$$=-2+x=\underline{Q_2(x)}.$$

2. $\underline{f(1)=2-x}$, $\underline{f(x)=2-x}$ og $\underline{f(x^2)}=(2-x)(1-4)=\underline{-6+3x}.$

$$\underline{{}_mF_m}=\left[{}_m\underline{f(1)}\ \ {}_m\underline{f(x)}\ \ {}_m\underline{f(x^2)}\right]=\underline{\begin{bmatrix}2&2&-6\\-1&-1&3\end{bmatrix}}.$$

Mat 1. 2-timers prøve 8.12.2011.

Opgave 3 fortsat.

3. $P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$.

$f(P(x)) = Q_2(x) \iff {}_m\underline{\underline{f(P(x))}} = {}_m\underline{\underline{Q_2(x)}} \iff {}_m\underline{\underline{F}}_m \, {}_m\underline{\underline{P(x)}} = {}_m\underline{\underline{Q_2(x)}} \iff$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{M}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$a_0 + a_1 - 3a_2 = -1$. Sættes $a_1 = t_1$ og $a_2 = t_2$ fås

$(a_0, a_1, a_2) = (-1, 0, 0) + t_1(-1, 1, 0) + t_2(3, 0, 1)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Samtlige løsninger er da

$\underline{P(x) = -1 + t_1(-1+x) + t_2(3+x^2)} = \underline{(-1-t_1+3t_2) + t_1 x + t_2 x^2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$.

(Sættes $t_1 = t_2 = 1$ fås $P(x) = Q_1(x)$ i overensstemmelse med 1.)

<u>Anden metode</u>: $P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$.

$f(P(x)) = (2-x)(P(1) - 2P''(x)) = (2-x)(a_0 + a_1 + a_2 - 4a_2)$

$\qquad = (2a_0 + 2a_1 - 6a_2) + (-a_0 - a_1 + 3a_2)x$.

1. Sættes $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ fås $\underline{f(Q_1(x)) = Q_2(x)}$.

2. $${}_m\underline{\underline{f(P(x))}} = \begin{bmatrix} 2a_0 + 2a_1 - 6a_2 \\ -a_0 - a_1 + 3a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} {}_m\underline{\underline{P(x)}}.$$

Heraf følger, at f er lineær og at $\underline{{}_m\underline{\underline{F}}_m = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}$.

$${}_m\underline{\underline{f(1)}} = {}_m\underline{\underline{F}}_m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad {}_m\underline{\underline{f(x)}} = {}_m\underline{\underline{F}}_m \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad {}_m\underline{\underline{f(x^2)}} = {}_m\underline{\underline{F}}_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dvs. $\underline{f(1) = 2 - x}$, $\underline{f(x) = 2 - x}$ og $\underline{f(x^2) = -6 + 3x}$.

3. $f(P(x)) = (2a_0 + 2a_1 - 6a_2) + (-a_0 - a_1 + 3a_2)x = -2 + x \iff$

$$\begin{cases} 2a_0 + 2a_1 - 6a_2 = -2 \\ -a_0 - a_1 + 3a_2 = 1 \end{cases}. \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{M}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Hvorefter man som ovenfor finder samtlige løsninger

$\underline{P(x) = (-1 - t_1 + 3t_2) + t_1 x + t_2 x^2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$.

Opgave 4.

$f(x,y) = (\cos x + y)^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

1. $f(A) = f(\frac{\pi}{2}, 1) = 1, \quad f(B) = f(\frac{\pi}{2}, -1) = 1.$

Da $f(A) = f(B) = 1$ så ligger både A og B på niveau= kurven K_1.

$\underline{\nabla} f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = (-2\sin x(\cos x + y), 2(\cos x + y))$

$\underline{\nabla} f(A) = (-2, 2) \quad , \quad \underline{\nabla} f(B) = (2, -2).$

2. Givet kurven $\underline{r}(u) = (x(u), y(u)) = (u, 1-\cos u), \; u \in \mathbb{R}.$

$\underline{r}(u_0) = (u_0, 1-\cos u_0) = (\frac{\pi}{2}, 1) \Leftrightarrow u_0 = \frac{\pi}{2}.$

Da $f(\underline{r}(u)) = (\cos u + 1 - \cos u)^2 = 1$ for alle $u \in \mathbb{R}$, så er den givne kurve en del af niveaukurven K_1 nemlig den del, der går gennem A.

Det bemærkes at den givne kurve har ligningen $y = 1 - \cos x, \; x \in \mathbb{R}.$

3. $f(x,y) = (\cos x + y)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos x + y = \pm 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 - \cos x.$

Niveaukurven K_1 består da af de to kurver $y = 1 - \cos x, \; x \in \mathbb{R}$ og $y = -1 - \cos x, \; x \in \mathbb{R}.$

Kurven med ligningen $y = 1 - \cos x, \; x \in \mathbb{R}$ har parameter= fremstillingen $\underline{r}(u) = (u, 1-\cos u), \; u \in \mathbb{R}$ og er ifølge 2. den del af K_1, der går gennem A.

Kurven med ligningen $y = -1 - \cos x, \; x \in \mathbb{R}$ har parameter= fremstillingen $\underline{s}(u) = (u, -1-\cos u), \; u \in \mathbb{R}$ og er den del af K_1, der går gennem B, idet $\underline{s}(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, -1).$

K_1: