DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET
Skriftlig prøve den 8. december 2011.
Kursus Navn: Matematik 1 (2-timers prøve for efterårssemesteret). **Kursus nr.** 01005
Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte hjælpemidler må medbringes og benyttes.
Vægtning: De fire opgaver vægtes ens.
Alle svar skal være begrundede, og mellemregninger skal anføres i passende omfang.
Der må ikke kommunikeres med andre under prøven, hverken direkte eller elektronisk.

OPGAVE 1

Givet matricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Et homogent lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med tre ubekendte har $\mathbf{A}$ som koefficientmatrix. Opskriv ligningssystemets totalmatrix $\mathbf{T}$, bestem $\text{trap}(\mathbf{T})$ ved hjælp af rækkeoperationer og angiv ligningssystemets løsningsmængde på standard-parameterform.

Det oplyses at matricen $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ har egenværdien 2.

2. Vis at $\mathbf{A}$ er den karakteristiske matrix (reduktionsmatricen) for $\mathbf{B}$ hørende til egenværdien 2, og find tre forskellige egenvektorer for $\mathbf{B}$ hørende til egenværdien 2.

OPGAVE 2

1. Betragt det komplekse tal $z = -2+2i$. Bestem $\text{Re}(z)$ og $\text{Im}(z)$, og indtegn tallene $z, \bar{z}$ og $\frac{1}{z}$ i den komplekse talplan.

En andenordens lineær differentialligning er givet ved

$$(*) \qquad x''(t) + a_1 \cdot x'(t) + a_0 \cdot x(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}$$

hvor a_0 og a_1 er reelle tal. Det oplyses at den fuldstændige løsning til $(*)$ har formen

$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\cos(2t) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige reelle tal.

2. Angiv rødderne i karakterligningen for $(*)$ og bestem a_0 og a_1.

3. Find samtlige løsninger $x(t)$ til $(*)$ som opfylder de to betingelser:

$$x(0) = 0 \text{ og } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

   Og find samtlige løsninger $x(t)$ til $(*)$ som opfylder de to betingelser:

$$x(0) = 1 \text{ og } x(\pi) = 0\,.$$

Opgavesættet fortsætter ⟶

OPGAVE 3

Om matricen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ oplyses at $\operatorname{trap}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En lineær afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ af vektorrummet af polynomier af højst anden grad ind i vektorrummet af polynomier af højst første grad er givet ved at der for ethvert $P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ gælder

$$f(P(x)) = (2-x)\cdot\big(P(1) - 2\cdot P''(x)\big)\,.$$

Der er endvidere givet polynomierne

$$Q_1(x) = 1 + x + x^2 \text{ og } Q_2(x) = -2 + x\,.$$

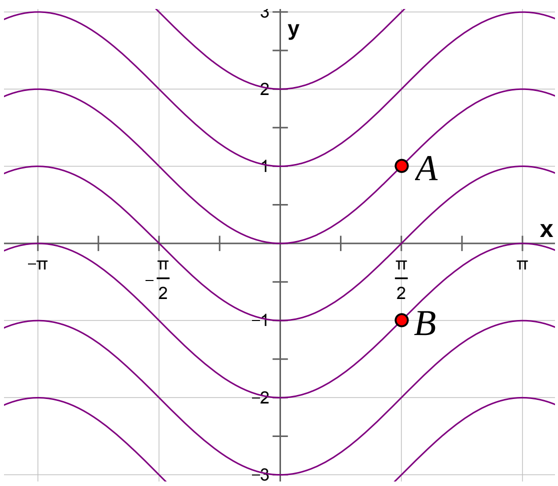
1. Vis at $f(Q_1(x)) = Q_2(x)$.
2. Bestem $f(1)$, $f(x)$ og $f(x^2)$, og opstil afbildningsmatricen for f med hensyn til monomiebasen i $P_2(\mathbb{R})$ og monomiebasen i $P_1(\mathbb{R})$.
3. Bestem samtlige løsninger $P(x) \in P_2(\mathbb{R})$ til ligningen
$$f(P(x)) = Q_2(x)\,.$$

OPGAVE 4

Givet funktionen

$$f(x,y) = (\cos(x) + y)^2 \text{ hvor } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

På figuren nedenfor vises et udsnit af niveaukurver for f. Endvidere er der indtegnet punkterne $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ og $B = \left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.



1. Gør rede for at både A og B ligger på niveaukurven K_1, og bestem gradienten af f i de to punkter.

En kurve i (x,y)-planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u) = (u, 1-\cos(u))\,,\ u \in \mathbb{R}\,.$$

2. Bestem et tal u_0 der opfylder at $\mathbf{r}(u_0) = A$, og vis at $\mathbf{r}(u)$ er en del af K_1.
3. Opskriv en parameterfremstilling for den del af K_1 som går gennem B.

Opgavesættet er slut.