Opgaver til

Uge 3 – Store Dag

Opgave 1 Dagens wetware-opgave

Tandbørsten Løs ligningen $(z-3)(z^2+1)=0$.

Opgave 2 Førstegradpolynomier

Et polynomium $P:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ er givet ved $P(z)=(2-i)z+i$.

a) Løs ligningen $P(z)=0$.

b) Løs ligningerne $P(z)=2$ og $P(z)=-2+2i$.

Opgave 3 Binome 2. gradsligninger med reel højreside

a) Lad r være et positivt reelt tal. Gør rede for at ligningen

$$z^2=-r$$

har netop to løsninger som er givet ved $z_0=-i\sqrt{r}$ og $z_1=i\sqrt{r}$.

b) Løs ligningerne $z^2=16$ og $z^2=-16$.

c) Løs ligningerne $z^2=17$ og $z^2=-17$.

d) Løs ligningerne $z^2=625$ og $z^2=-625$.

e) Lad b være et reelt tal. Vis at løsningerne for $z^2=ib$ ligger på linjen $y=x$ når $b>0$ og på linjen $y=-x$ når $b<0$.

Opgave 4 At kunne faktorisere for at kunne forkorte

a) Vis (uden brug af løsningsformel!) at $-1+2i$ er rod i andengradspolynomiet

$$P(z) = z^2 + 2z + 5\,.$$

Bestem (uden brug af løsningsformel!) polynomiets anden rod og opskriv $P(z)$ på faktoriseret form.

b) Det oplyses at i og $1+i$ er rødder i polynomiet

$$Q(z) = z^2 - z - 2iz - 1 + i\ .$$

Forkort brøken

$$\frac{z^2 - z - 2iz - 1 + i}{z - 1 - i}\,.$$

Opgave 5 Nedstigningssætningen

a) Vis at $x_0 = 1$ er rod i polynomiet

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

og bestem et andengradspolynomium Q således at

$$P(x) = (x-1)\cdot Q(x)\,.$$

b) Bestem samtlige komplekse rødder for 7. gradspolynomiet

$$P(z) = (z^6 - z^5 + z^4 - z^3)(z-1)\,.$$

Opskriv polynomiet på fuldstændig faktoriseret form, og angiv røddernes algebraiske multipliciteter. Vink: Udnyt resultatet i foregående spørgsmål.

Rødder:
0 med multiplicitet 3
1 med multiplicitet 2
i med multiplicitet 1
$-i$ med multiplicitet 1

c) Vis at 2 er dobbeltrod i polynomiet $2z^4 - 4z^3 - 16z + 32$.

d) Find samtlige løsninger til ligningen

$$2z^4 - 4z^3 - 16z + 32 = 0\,.$$

Opgave 6 Få styr på begreberne

Vigtige afklaringer angående polynomier:

1. Hvis et n'te gradspolynomium og en n'te gradsligning har ens koefficienter, hvad er så egentlig forskellen mellem dem?
2. Hvor mange reelle rødder har et komplekst polynomium af grad n?
3. Hvor mange reelle rødder har et reelt polynomium af grad n?
4. Hvor mange reelle og komplekse rødder tilsammen har et reelt polynomium af grad n?
5. Om to n'te gradspolynomier P og Q vides at enhver rod i P er rod i Q med samme algebraiske multiplicitet. Er de to polynomier identiske?

Opgave 7 Differentiationer

a) Et reel polynomium P af en reel variabel er givet ved

$$P(x) = 25x^4 - 33x^3 + 49x^2 - 97x + 96\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Bestem den afledede af P.

b) I afsnit 29.10 i eNote 29 om komplekse tal indføres differentiation af *komplekse funktioner af en reel variabel*. Et eksempel på en kompleks funktion af en reel variabel er funktionen f givet ved

$$f(t) = t - 3t^3 + 1 + i\,(t^2 - 5t - 1)\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Bemærk at såvel *realdelen* som *imiginærdelen* af f er et reel polynomium af en reel variabel. Bestem den afledede $f'(t)$ og differentialkvotienten $f'(0)$.

c) Funktionen g er givet ved

$$g(t) = (i \cdot t^2 + t - i) \cdot ((1+i)t - i)\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Der findes netop én løsning til ligningen $g'(t) = -6 - i$. Find den!

d) Et komplekst polynomium Q af en reel variabel er givet ved

$$Q(x) = (1+2i)x^2 + (2-5i)x - (1-i)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Eftervis at Q kan differentieres efter de samme regler som gælder for reelle polynomier af en reel variabel, når blot i behandles som enhver anden konstant.

Opgave 8 En andengradslignings geometri. Enjoy!

Givet det komplekse tal $\alpha = 3 - 4\,i$ og den komplekse talmængde

$$S = \{\, z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z| = 5 \,\}\,.$$

a) Vis at $\alpha \in S$. Illustrér.

Det oplyses at polynomiet $P(z) = z^2 + a\,z + b$ har reelle koefficienter, og at α er rod i $P(z)$.

b) Angiv samtlige rødder i $P(z)$, og bestem a og b .

c) Lad c være et vilkårligt reelt tal som opfylder $c \in [-10\,;\,10\,]$. Vis at rødderne i polynomiet $Q(z) = z^2 + c\,z + 25$ tilhører S .

Opgave 9 Polynomium med komplekse koefficienter (advanced)

a) Løs den binome andengradsligning $z^2 = 3 - 4i$.

b) Givet polynomiet

$$P(z) = z^2 - (1 + 2i)z - \frac{3}{2} + 2i\,.$$

Bestem polynomiets rødder.