Opgaver til

Uge 3 – Lille Dag

Opgave 1 Dagens wetware-opgave

Tandbørsten

Differentiér $(x^2+7)^{13}$.

Opgave 2 Afledet funktion

a) Bestem den afledede funktion for hver af de følgende funktioner i deres respektive definitionsmængder:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= (x^2+1)\cdot\sin(x)\\
f_2(x) &= \frac{e^x}{x^2}\\
f_3(x) &= \cos(\ln(x)+1)\\
f_4(x) &= \cos(\cos(\cos(x)))
\end{aligned}
$$

Opgave 3 Differentialkvotienter for komplekse funktioner

a) Find for enhvert $t\in\mathbb{R}$ differentialkvotienterne af følgende funktioner:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= t^2 + i\,\sin(t)\\
f_2(t) &= 1 + it^5\\
f_3(t) &= t^5 - i\\
f_4(t) &= 3\,e^{it}\\
f_5(t) &= i\,e^{2t+3it}
\end{aligned}
$$

|||| Opgave 4 At differentiere en omvendt funktion

Hvis funktionen $y = f(x)$ har en omvendt funktion $x = f^{-1}(y)$ kan vi finde den afledede af $f^{-1}(y)$ således:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

a) Sinus har i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ en omvendt funktion som betegnes arcsinus. Bestem den afledede af arcsin.

|||| Opgave 5 Tangens og arctan

Funktionen tangens er som bekendt defineret ved udtrykket

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,,\ t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + p\pi \,|\, p \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

a) Vis at differentialkvotienten af tangens i ethvert t i definitionensmængden er givet ved udtrykket

$$\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)\,.$$

b) Tangens har i det åbne interval $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ en omvendt funktion arcustangens som betegnes arctan. Bestem $\arctan'(x)$ for ethvert x i intervallet.

|||| Opgave 6 Differentialkvotient direkte fra definitionen. Teoriopgave

a) Vis at den reelle funktionen f med forskrift $f(x) = x^2$ er differentiabel i ethvert $x0 \in \mathbb{R}$ med differentialkvotient

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = 2x_0\,.$$

Vink: Indsæt forskriften i udtrykket

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)(x - x_0)$$

og isolér $\epsilon(x - x_0)$.

Opgave 7 2. gradsligninger med reelle koefficienter. Træning

a) Løs nedenstående ligninger dels inden for $\mathbb{R}$ og dels inden for $\mathbb{C}$.

1. $2x^2 + 9x - 5 = 0$
2. $x^2 - 4x = 0$
3. $x^2 - 4x + 13 = 0$

b) Løs ligningen

$$2(x+1-i)(x+1+i) = 0$$

og vis at den er af typen *andengradsligning med reelle koefficienter*.

Opgave 8 2. gradsligninger med komplekse koefficienter (advanced)

a) Find løsningerne for ligningen

$$z^2 - (1+5i)z = 0\,.$$

b) Vis at følgende andengradsligning har rent imaginær diskriminant, og løs den.

$$z^2 + (2+2i)z - 2i = 0\,.$$

Opgave 9 Fri leg med epsilonfunktioner (advanced)

a) Vis, at funktionen:

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ikke er en epsilon-funktion.

b) Vis, at funktionen:

$$f_2(x) = 1 - \cos(x) \tag{2}$$

er en epsilon-funktion.

c) Vis, at den komplekse funktion:

$$f_3(x) = i\mathrm{e}^{ix} - i \tag{3}$$

er en epsilon-funktion.